Para el Lunes 16/3/2015. Se pueden entregar los problemas individualmente o en grupo. Hacerlo en grupo no penaliza. Quienes entreguen en grupo, por favor que escriban sus nombres en orden alfabético, para minimizar errores al copiar las notas.

Salvo afirmación expresa en sentido contrario se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una sub-σ-álgebra, que las funciones son medibles, etc.

Recordatorio: si $1 \leq p < \infty$, $\|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$, mientras que $\|f\|_\infty$ denota el supremo esencial de $|f|$. De hecho, la definición $\|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$ tiene sentido para cualquier $p > 0$ finito, pero puede demostrarse que si $p < 1$ esta expresión no define una norma.

1) Sea $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$ una filtración de sub-σ-álgebras de $\mathcal{A}$, y sea $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Demostrar que $X_n := E(Y|\mathcal{A}_n)$ define una martingala en L^1. Decidir razonadamente si X_n converge a Y en L^1.

2) Sea $X := \{X_n\}_{n=0}^\infty$ una martingala en L^2. Probar que los incrementos son ortogonales, donde los incrementos se definen como $Y_0 := X_0$, y para $n > 0$, $Y_n := X_n - X_{n-1}$. Es decir, demostrar que si $j \neq k$, entonces $(Y_j, Y_k) = \int Y_j Y_k = 0$.

3) Probar el Teorema de Pitágoras generalizado: Si $u_1, \ldots, u_n$ son vectores ortogonales en un espacio vectorial con un producto interno (escalar o hermítico), entonces $\|\sum_1^n u_i\|^2 = \sum_1^n \|u_i\|^2$, donde $\|w\|^2 := (w, w)$.