Para el Lunes 9/3/2015. Se pueden entregar los problemas individualmente o en grupo. Hacerlo en grupo no penaliza. Quienes entreguen en grupo, por favor que escriban sus nombres en orden alfabético, para minimizar errores al copiar las notas.

Salvo afirmación expresa en sentido contrario se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una sub-σ-álgebra, que las funciones son medibles, etc.

Recordatorio: si $1 \leq p < \infty$, $\|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$, mientras que $\|f\|_\infty$ denota el supremo esencial de $|f|$. De hecho, la definición $\|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$ tiene sentido para cualquier $p > 0$ finito, pero puede demostrarse que si $p < 1$ esta expresión no define una norma.

1) Sea $X : [0,1) \to [0,1)$ la identidad $X(w) = w$, donde a $[0,1)$ se le asigna la probabilidad uniforme (en este caso, la medida de Lebesgue). Sea $\mathcal{A}_n := \sigma([0, 1/2^n), [1/2^n, 2/2^n), \ldots, [(2^n - 1)/2^n, 1))$ la σ-álgebra generada por los intervalos diádicos $[j/2^n, (j+1)/2^n)$, $j = 1 \ldots, n-1$. Calcular $E(X|\mathcal{A}_n)$. Decidir razonadamente si la sucesión de v.a. $\{E(X|\mathcal{A}_n)\}_{n=0}^\infty$ converge (y en caso de respuesta afirmativa, determinar a qué) en alguno de los siguientes sentidos: a) uniformemtente, b) en L^p, determinando para que valores de p hay convergencia, c) en casi todo punto, d) en medida.

2) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^\infty$ es una submartingala, y $0 < r \leq s \leq \infty$, entonces $\|X\|_r \leq \|X\|_s$, donde $\|X\|_p := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\|_p$.

3) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^\infty$ es una martingala, y $\|X\|_s < \infty$, donde $1 \leq s < \infty$, entonces $Y := \{|X_n|^s\}_{n=0}^\infty$ es una submartingala en L^1.

4) Sea $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de v.a.i.i.d., tales que $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$, y sea $S_n := \sum_{i=0}^n X_i$. Vimos en clase que $S := \{S_n\}_{n=0}^\infty$ es una martingala adaptada a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$, donde $\mathcal{A}_n := \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Sea $c > 0$. Calcular $\lim_{n\to\infty} P(-c < S_n < c)$. Sugerencia: se puede usar el Teorema del Límite Central, visto en Probabilidad I. Decidir razonadamente si la martingala $S = \{S_n\}_{n=0}^\infty$ está en L^1, es decir, si $\sup_n \|S_n\|_1 < \infty$. Decidir razonadamente si S_n converge en casi todo punto a una función S_∞ tal que $P(|S_\infty| = \infty) = 0$.