Para el Lunes 2/3/2015. Se pueden entregar los problemas individualmente o en grupo. Hacerlo en grupo no penaliza.

Salvo afirmación expresa en sentido contrario se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una sub-σ-álgebra, que las funciones son medibles, etc..

Recordatorio: si $1 \le p < \infty$, $\|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$, mientras que $\|f\|_\infty$ denota el supremo esencial de $|f|$. De hecho, la definición $\|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$ tiene sentido para cualquier $p > 0$ finito, pero puede demostrarse que si $p < 1$ esta expresión no define una norma.

1) Ejemplos sobre la fórmula del cambio de variables.

a) Sea $X : [0,1) \to \mathbb{R}$ la variable aleatoria $X(w) := 2w(\text{mod}(1)$. Es decir, si $w \in [0,1/2)$, entonces $X(w) = 2w$, mientras que si $w \in [1/2, 1)$, entonces $X(w) = 2w - 1$. En $[0,1)$ tenemos la probabilidad uniforme con los conjuntos de Borel (o Lebesgue, para este problema da igual). Hallar la función de distribución F_X, y P_X, la probabilidad imagen o ley de X. Decidir razonadamente si X es una v.a. continua, y en caso de respuesta afirmativa, hallar su función de densidad f_X.

b) Sea $Y : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ la variable aleatoria $Y(x,y) := y$. En $[0,1]^2$ tenemos la probabilidad uniforme con los conjuntos de Borel (o Lebesgue, para este problema da igual). Hallar la función de distribución F_Y, y P_Y, la probabilidad imagen o ley de Y. Decidir razonadamente si Y es una v.a. continua, y en caso de respuesta afirmativa, hallar su función de densidad f_Y.

c) Decidir razonadamente si para toda función de Borel acotada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\int_{[0,1)} g(X(w))dw = \int_{[0,1]^2} g(Y(x,y))dxdy.$$

2) Demostrar la desigualdad de Jensen condicional: si $X : \Omega \to I \subset \mathbb{R}$, donde I es un intervalo en $\mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ es convexa, y $X, g(X) \in L^1$, entonces $g(E(X|\mathcal{B})) \le E(g(X)|\mathcal{B})$.

3) Sean $p, q \ge 1$ exponentes conjugados, es decir, p y q satisfacen $1/p + 1/q = 1$ (si $p = 1$, entonces $q = \infty$, y viceversa). Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, enunciar y probar la desigualdad condicional de Hölder. Sugerencia: usar la desigualdad de Hölder.

4) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^\infty$ es una martingala adaptada a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$, entonces para todo $n > 0$ tenemos $EX_n = EX_0$. Enunciar los resultados análogos para sub y supermartingalas.

5) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^\infty$ es una martingala adaptada a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$, entonces para todo $m, n \ge 0$ tenemos $E(X_{n+m}|\mathcal{A}_n) = X_n$. Enunciar los resultados análogos para sub y supermartingalas.

6) Cómo ganar un euro con probabilidad 1, en un juego justo: la estratégia del doble o nada. Apostamos un euro a que sale cara. Si sale cara nos plantamos, si sale cruz apostamos 2 euros a que sale cara. Si sale cara nos plantamos, si sale cruz apostamos 4 euros a que sale cara. Etc.. Demostrar que la estratégia anterior gana un euro con probabilidad 1.