Para el Lunes 23/2/2015. Se pueden entregar los problemas individualmente o en grupo. Hacerlo en grupo no penaliza.

Salvo afirmación expresa en sentido contrario se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una sub-σ-álgebra, que las funciones son medibles, etc..

Recordatorio: si $1 \leq p < \infty$, $\|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$, mientras que $\|f\|_\infty$ denota el supremo esencial de $|f|$. De hecho, la definición $\|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$ tiene sentido para cualquier $p > 0$ finito, pero puede demostrarse que si $p < 1$ esta expresión no define una norma.

1) La desigualdad aritmético-geométrica dice que la media aritmética de un conjunto de números no negativos es al menos tan grande como su media geométrica, es decir, si $a_1, \dots, a_n > 0$ satisfacen $a_1 + \cdots + a_n = 1$, y $x_1, \dots, x_n \geq 0$, entonces $\Pi_{i=1}^n x_i^{a_i} \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Demostrar dicha desigualdad. Sugerencia: usar la concavidad de log, o la convexidad de exp.

2) Demostrar la siguiente desigualdad de Young: para $t, u \geq 0$, y $p, q > 1$ tales que $1/p + 1/q = 1$, tenemos $tu \leq t^p/p + u^q/q$. Observación: ésta es otra forma de escribir la desigualdad aritmético-geométrica para $n = 2$, mediante un cambio obvio de variables.

3) Sean $p, q \geq 1$ exponentes conjugados, es decir, p y q satisfacen $1/p + 1/q = 1$ (si $p = 1$, entonces $q = \infty$, y viceversa). Dado un espacio de medida arbitrario $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, demostrar la desigualdad de Hölder: si $f \in L^p$ y $g \in L^q$, entonces $fg \in L^1$, y $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Sugerencias: El caso $p = 1, q = \infty$ sale directamente de las definiciones. Para $p > 1$, suponemos que $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$, y reemplazamos f y g con $f/\|f\|_p$ y $g/\|g\|_q$. Después usamos la desigualdad de Young (punto a punto) e integramos.

4) Dada $f : \Omega \to \mathbb{R}$ en L^p, $1 < p < \infty$, escoger $g \in L^q$ tal que $\int fg = \|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q$. Concluir que $\|f\|_p = \sup_{\{g \in L^q : \|g\|_q = 1\}} \int fg$.

5) Usar $\|f\|_p = \sup_{\{g \in L^q : \|g\|_q = 1\}} \int fg$ cuando $1 < p < \infty$ para obtener la desigualdad triangular o de Minkowski: $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Probar también los casos (bastante obvios) $p = 1$ y $p = \infty$.

6) Probar que $\|\cdot\|_p$ es una norma en L^p (considerando que dos funciones son iguales cuando son iguales en casi todo punto).

7) Probar la desigualdad de Jensen: si $X : \Omega \to I \subset \mathbb{R}$, donde I es un intervalo en $\mathbb{R}$, y X tiene media finita, entonces para toda función convexa $g : I \to \mathbb{R}$, $g(EX) \leq E(g(X))$.
Sugerencia: nótese que al trabajar en un espacio de probabiildad, si $L(t) := at + b$ es una recta, entonces conmuta con la integración, es decir, $L(\int X(\omega) dP(\omega)) = \int L(X(\omega)) dP(\omega)$. La desigualdad de Jensen es consecuencia de esta observación, junto con el hecho de que las funciones convexas están por encima de todas sus rectas soporte.

8) Probar que si $0 < r \leq s \leq \infty$, entonces $\|f\|_{L^r(\Omega, \mathcal{A}, P)} \leq \|f\|_{L^s(\Omega, \mathcal{A}, P)}$, luego $L^s(\Omega, \mathcal{A}, P) \subset L^r(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (sugerencia, usar Jensen o Hölder). Demostrar que si el espacio tiene medida infinita, esta inclusión puede fallar.