Para el Lunes 9/2/2015. Se pueden entregar problemas individualmente o en grupo. Hacerlo en grupo no penaliza.

Se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, y que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una sub-σ-álgebra.

1) Sea X una v.a. con distribución $N(0,1)$ (normal con media 0 y varianza 1). Calcular el tercer momento $E(X^3)$.

2) Sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ la sub-σ-álgebra generada por una partición $\{A_1, \dots, A_n\}$ de Ω, donde todos los conjuntos de la partición tienen probabilidad positiva. Dada una v.a. X, demostrar que si la variable aleatoria $T(X)$ satisface
1) para todo $B \in \mathcal{B}$, $\int_B T(X) dP = \int_B X dP$, y
2) $T(X)$ es $\mathcal{B}$-medible,
entonces cuando $w \in A_i$, $T(X)(w) = \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X dP$.
Probar que si $T(X)(w)$ está definida mediante $T(X)(w) := \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X dP$ cuando $w \in A_i$, entonces $T(X)$ satisface las condiciones 1) y 2) enunciadas arriba.
Este ejercicio demuestra que las condiciones 1) y 2) determinan de modo único la esperanza condicional, cuando la sub-σ-álgebra está generada por una partición (el resultado también es cierto para sub-σ-álgebras arbitrarias, pero entonces es necesario definir la esperanza condicional mediante un procedimiento distinto).

3) En un examen tipo test se plantean 5 preguntas para responder verdadero o falso. Los puntos asignados a las preguntas V o F son: respuesta correcta, 1 punto, respuesta incorrecta, - 1 punto, en blanco, 0 puntos. Valor mínimo del problema: 0 puntos. Es decir, si la puntuación es negativa se asigna un cero al problema.
a) Calcular la nota esperada de un alumno que responda a las 5 perguntas de manera aleatoria, por ejemplo lanzando una moneda equilibrada 5 veces.
b) Sabiendo que el alumno ha respondido correctamente a la primera pregunta, calcular la nota esperada.

4) Lanzamos un dado equilibrado de 4 caras dos veces. Sea W la variable aleatoria que toma como valor el máximo de los dos lanzamientos. A continuación lanzamos una moneda equilibrada W veces, usando S para denotar el número de caras obtenido. Todos los lanzamientos son independientes.
a) Hallar $E(S|W)$.
b) Hallar $E(S)$.