I) Enunciar y probar la Ley Fuerte de los Grandes Números para variables aleatorias uniformemente acotadas en L^4.

Comentarios: 1) Las hipótesis eran $E|X_i|^4 \le K < \infty$ y $E(X_1) = \mu$ (bastaba que las variables fueran independientes, no hace falta ident. dist.) y la conclusión, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mu$ casi seguro.

En realidad tampoco hace falta suponer que todas las medias son iguales, pero entonces hay que escribir la conclusión como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} (X_i - EX_i) = 0 \text{ casi seguro.}$$

El argumento es el mismo, $Y_i = X_i - EX_i$ tiene media 0 y cuarto momento acotado:

$$\|Y_i\|_4 \le \|X_i\|_4 + \|EX_i\|_4 \le K^{\frac{1}{4}} + |EX_i| \le K^{\frac{1}{4}} + K^{\frac{1}{4}} \text{ por Jensen}$$

Entonces trabajamos con Y_i.

2) OJO: No basta decir que $\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i\right)^4 = 0$ para concluir que $\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i\right)^4 \to 0$ casi seguro, en general

$$0 \le W_n \xrightarrow{L^1} 0 \not\Rightarrow W_n \to 0 \text{ c.s.}$$

(aquí $W_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i\right)^4$). Véase II 8).

3) $\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i\right)^4 = E\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i\right)^4\right)$ por el TC ~~Monótona~~ MONOTONA (no basta la linealidad): $\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i\right)^4 \le \sum_{n=1}^{N+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i\right)^4$.

II) 1) Existen variables aleatorias X e Y definidas en Ω y con idéntica distribución tales que para todo w, $X(w) \neq Y(w)$. V F Tomamos $P(X=1)=\frac{1}{2}=P(X=0)=P(Y=1)=P(Y=0)$ Como X e Y tienen la misma función de masa tienen la misma distribución. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, dP) = ([0,1), \text{Borel}, dx)$, $X := \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}$, $Y := \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1)}$.

2) En $[0,1)$ con la probabilidad uniforme (medida de Lebesgue) las varaibles aleatorias $\mathbf{1}_{[0,1/2)}$ y $-\mathbf{1}_{[0,1/4)\cup[1/2,3/4)}$ son independientes. V F Sea $g(x) = -x$. g es lineal, luego Borel. Como $X := \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}$ e $Y := \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4})\cup[\frac{1}{2},\frac{3}{4})}$ son independientes, tambien lo son X y $g(Y)$

Ver Parcial. Alternativa: argumentar como en el parcial.

3) Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una submartingala adaptada a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces para todo $n > 0$ y para casi todo w tenemos $E(X_{n+1}|\mathcal{A}_n)(w) \geq X_n(w)$. V F Por def. de submartingala.

4) Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una submartingala adaptada a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces para todo $n > 0$ y para casi todo w tenemos $E(X_{n+1}|X_n)(w) \geq X_n(w)$ (recordatorio sobre notación: condicionar con respecto a X_n es lo mismo que condicionar con respecto a $\sigma(X_n)$). V F Basta ver que $\forall B \in \sigma(X_n)$, $\int_B E(X_{n+1}|X_n) \geq \int_B X_n$. Como $B \in \sigma(X_n) \subset \mathcal{A}_n$

$$\int_B E(X_{n+1}|X_n) = \int_B X_{n+1} = \int_B E(X_{n+1}|\mathcal{A}_n) \geq \int_B X_n$$

al ser $E(X_{n+1}|\mathcal{A}_n) \geq X_n$ c.s.

Para las preguntas restantes en este problema, suponemos que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes, tales que $P(X_n = 1) = 1/n$, y $P(X_n = 0) = 1 - 1/n$.

5) Cuando $n \to \infty$, $X_n \to 0$ en distribución, y por tanto en probabilidad. V F $F_0 = \mathbb{1}_{[0,\infty)}$, $F_{X_n}(t) = 0$ si $t<0$, $= 1-\frac{1}{n}$ si $0 \leq t < 1$, $= 1$ si $t \geq 1$, luego $X_n \xrightarrow{D} 0$ y como 0 es constante, en prob. Alternativamente, $P(X_n \neq 0) = \frac{1}{n}$ luego $X_n \xrightarrow{P} 0$. (y por tanto en dist.).

6) Cuando $n \to \infty$, $X_n \to 0$ en L^p para todo p tal que $1 \leq p < \infty$. V F Fijamos $1 \leq p < \infty$. $\|X_n\|_p^p = \int |X_n|^p = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0\left(1-\frac{1}{n}\right) \to 0$

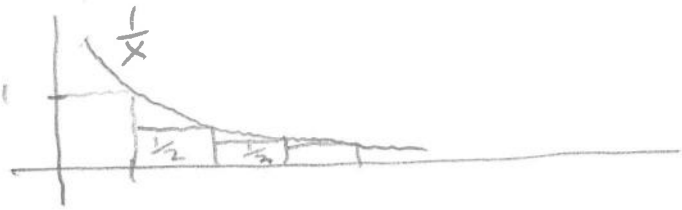
7) Cuando $n \to \infty$, $X_n \to 0$ en L^∞. V F $\forall n$ $P(X_n = 1) > 0$, luego $\|X_n\|_\infty = \|X_n - 0\|_\infty = 1$, $X_n \overset{L^\infty}{\not\to} 0$.

8) Cuando $n \to \infty$, $X_n \to 0$ casi seguro. V F Sea $A_n = \{X_n = 1\}$. Entonces $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$. Como $\sum_1^\infty P(A_n) = \sum_1^\infty \frac{1}{n} = \infty$, por Borel-Cantelli II, $P(\limsup_n A_n) = 1$, es decir, $\limsup_n \mathbb{1}_{A_n} = \limsup_n X_n = 1$ casi seguro.

9) Cuando $n \to \infty$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) \to 0$ casi seguro. V F Por el problema 1 sin asumir igualdad de medias, o por la ley fuerte de Kolmogorov para v.a. en L^2.

10) Cuando $n \to \infty$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \to 0$ casi seguro. V F Por 9). Como

$$E X_i = \frac{1}{i}$$



$$\sum_1^n E X_i \le 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$$

$$= 1 + \log n$$

$$\frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - EX_i) = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_i$$

$\longrightarrow 0$ casi seguro, porque los límites numéricos existen para casi todo ω, y

$$0 \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E X_i \le \frac{1 + \log n}{n} \longrightarrow 0.$$

III) (10 puntos) En un examen tipo test se planten 5 preguntas para responder verdadero o falso. Los puntos asignados a las preguntas V o F son: respuesta correcta, 1 punto, respuesta incorrecta, - 1 punto, en blanco, 0 puntos. Valor mínimo del problema: 0 puntos. Es decir, si la puntuación es negativa se asigna un cero al problema.

a) Calcular la nota esperada de un alumno que responda a las 5 perguntas de manera aleatoria, por ejemplo lanzando una moneda equilibrada 5 veces.

Comentario: La media tiene que ser estrictamente positiva, ya que la variable de interés nunca toma valores negativos y no es 0 c.s.

a) Sea Y_i t.q. $P(Y_i = 1) = \frac{1}{2} = P(Y_i = -1)$,

$Y = \sum_1^5 Y_i$, $X = Y^+ = \max\{0, Y\}$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} i P(X=i)$$

$X=1$ si se producen 3 aciertos y 2 fallos, con probabilidad $P(X=1) = \binom{5}{3}\frac{1}{2^5}$.

Razonando del mismo modo para $X = 2, 3, 4, 5$, tenemos

$$E(X) = 1 \cdot \frac{10}{32} + 3\,\frac{5}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} = \frac{30}{32} = \frac{15}{16}$$

b) Sabiendo que el alumno ha respondido correctamente a la primera pregunta, calcular la nota esperada.

Con la misma notación que antes,

$$E(X \mid Y_1 = 1) = E\left(\left(\sum_1^5 Y_i\right)^+ \,\Big|\, Y_1 = 1\right)$$

$$= E\left(\left(1 + \sum_{i=2}^5 Y_i\right)^+ \,\Big|\, Y_1 = 1\right)$$

$$= E\left[\left(1 + \sum_{i=2}^5 Y_i\right)^+\right],$$ ya que $Y_2, \dots, Y_5$ son

indep. de Y_1, y por tanto también

$\left(1 + \sum_2^5 Y_i\right)^+$. Ahora argumentamos como

antes, con $W = \left(1 + \sum_2^5 Y_i\right)^+$.

$$E(W) = \sum_{i=1}^5 i\, P(W = i)$$

$$= 1 \cdot \binom{4}{2} \frac{1}{2^4} + 3 \cdot \binom{4}{3} \frac{1}{2^4} + 5 \binom{4}{4} \frac{1}{2^4} = \frac{23}{16}.$$

IV) a) (2 puntos) Enunciar la Ley 0-1 de Kolmogorov. Ver apuntes.

b) (2 puntos) Sea P la probabilidad uniforme en los conjuntos de Borel de $[0,1]$, y sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, tales que $X_i\,[0,1] \to [-1,1]$. Sabiendo que las medias $M_n := n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ satisfacen, para todo $w \in [0,1/2]$, $\lim_n M_n(w) = 1/3$, decidir razonadamente si $\lim_n M_n$ existe o no en $(1/2,1]$, y en caso de respuesta afirmativa, determinar a qué converge, y en qué sentido.

Aplicamos a). Sea $B = \{w \in \Omega : \lim_n M_n(w) = \frac{1}{3}\}$. Aquí $\Omega = [0,1]$, y $|X_i| \leq 1$. Fijamos $K \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

$\left|\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_1^K X_i\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_1^K 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{K}{n} = 0$, luego B no depende de $X_1,\dots,X_K$, y por tanto es $\sigma\left(\bigcup_{K+1}^{\infty} \sigma(X_i)\right)$-medible. Como K es arbitrario, $B \in \bigcap_{K=1}^{\infty} \sigma\left(\bigcup_{i=K+1}^{\infty} \sigma(X_i)\right)$, luego por la ley 0-1 de Kolmogorov, $P(B) = 0$ ó $P(B) = 1$. Como $P(B) \geq \frac{1}{2}$, $P(B) = 1$.

c) (1 punto) Probar que las sumas $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ pertenecen a L^1.

$E|S_n| \leq E\sum_1^n |X_i| = \sum_{i=1}^n E|X_i| \leq n < \infty$.

d) (1 punto) Sea $T : [0,1] \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$ una variable aleatoria con $E(T) = 42$, tal que las variables $T, X_1, X_2, \dots$ son independientes. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, las variables $\mathbf{1}_{\{T=n\}}, X_1, X_2, \dots$ son independientes. Decidir razonadamente si $\mathbf{1}_{\{T=n\}}$ y S_n son independientes.

Basta ver que si $B \in \sigma(\mathbb{1}_{\{T=n\}}) \subset \sigma(T)$ y $A_i \in \sigma(X_{K_i})$, $i = 1,\dots,n$, $P\left(B \cap \left(\bigcap_1^n A_i\right)\right) = P(B)\cdot\prod_1^n P(A_i)$. Pero esto es obvio, al ser $T, X_1, X_2 \dots$ independientes y $B \in \sigma(T)$. Del mismo modo, como $\sigma(S_n) \subset \sigma(X_1,\dots,X_n)$, $\mathbb{1}_{\{T=n\}}$ y S_n son independientes.

e) (1 punto) Probar que la suma aleatoria S_T, definida mediante $S_T(w) := \sum_{i=1}^{T(w)} X_i(w)$, satisface la igualdad $S_T(w) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T=n\}}(w) S_n(w)$. Fijamos $w \in \Omega$. Entonces existe un único $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ t.q. $T(w) = N$. Por tanto

$$S_T(w) = \sum_1^{T(w)} X_i(w) = \sum_1^N X_i(w) = \mathbb{1}_{\{T=N\}}(w) \sum_1^N X_i(w)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T=i\}}(w)\, S_i(w)$$ (nótese que aunque parece una suma infinita, todos los términos menos quizá $\mathbb{1}_{\{T=N\}}(w) \sum_1^N X_i(w)$ son 0).

f) (3 puntos) Probar que la suma aleatoria $S_T := \sum_{i=1}^{T} X_i$ pertenece a L^1. Suponiendo que para toda $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $E(X_i) = 1/3$, hallar $E(S_T)$. Sugerencia: usar apartados anteriores.

En general, si $E|T| = ET < \infty$, como $E|X_i| \le 1$, usando e) tenemos

$$E|S_T| \le \sum_1^{\infty} E|\mathbb{1}_{\{T=n\}} S_n| = \sum_1^{\infty} E(\mathbb{1}_{\{T=n\}} |S_n|)$$

$$\overset{\text{indep}}{=} \sum_1^{\infty} E(\mathbb{1}_{\{T=n\}}) E|S_n| \le \sum_1^{\infty} P(T=n)\, n = ET < \infty.$$

$(ET = 42)$

Observación: como la "serie" $S_T(w)$ como máximo tiene un sumando distinto de 0, el intercambio

$$E|S_T| \le E \sum_1^{\infty} \mathbb{1}_{\{T=n\}} |S_n| = \sum_1^{\infty} E\, \mathbb{1}_{\{T=n\}} |S_n|$$

está justificado. Luego $S_T \in L^1$.

Argumentando del mismo modo,

$$E S_T = \sum_1^{\infty} E(\mathbb{1}_{\{T=n\}}) E(S_n) = \sum_1^{\infty} P(T=n) E(S_n)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_1^{\infty} n P(T=n) = \frac{1}{3} ET = \frac{1}{3} 42 = 14 \quad (= EX_1\, ET)$$

Nótese que $E(S_n) = \sum_1^n EX_i = \sum_1^n \frac{1}{3} = \frac{n}{3}$.