

Para el Lunes 3/3/2014. Se pueden entregar los problemas individualmente o en grupo. Hacerlo en grupo no penaliza.

Salvo afirmación expresa en sentido contrario se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  es una sub- $\sigma$ -álgebra, que las funciones son medibles, etc..

Recordatorio: si  $1 \leq p < \infty$ ,  $\|f\|_p := (\int |f|^p)^{1/p}$ , mientras que  $\|f\|_\infty$  denota el supremo esencial de  $|f|$ .

1) Pepe y Jaime juegan con una moneda equilibrada, lanzándola hasta que por primera vez aparece la sucesión de longitud dos elegida por uno de ellos. Usamos 1 para representar cara, 0 para representar cruz. Pepe escoge la sucesión 11, y a continuación, Jaime elige 01, pensando que ello le da ventaja. Hallar la probabilidad de que gane Jaime.

2) Probar que si  $X := \{X_n\}_{n=0}^\infty$  es una martingala adaptada a la filtración  $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$ , entonces para todo  $n > 0$  tenemos  $EX_n = EX_0$ . Enunciar los resultados análogos para sub y supermartingalas.

3) Probar que si  $X := \{X_n\}_{n=0}^\infty$  es una martingala adaptada a la filtración  $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$ , entonces para todo  $m, n \geq 0$  tenemos  $E(X_{n+m}|\mathcal{A}_n) = X_n$ . Enunciar los resultados análogos para sub y supermartingalas.

4) Sea  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  una sucesión de v.a.i.i.d., tales que  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$ , y sea  $S_n := \sum_{i=0}^n X_i$ . Probar que  $S := \{S_n\}_{n=0}^\infty$  es una martingala adaptada a la filtración  $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$ , donde  $\mathcal{A}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$ . En la demostración puede usarse el hecho de que si la v.a.  $Y$  es independiente de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}$ , entonces  $E(Y|\mathcal{B}) = E(Y)$ .

5) Cómo ganar un euro con probabilidad 1, en un juego justo: la estrategia del doble o nada. Apostamos un euro a que sale cara. Si sale cara nos plantamos, si sale cruz apostamos 2 euros a que sale cara. Si sale cara nos plantamos, si sale cruz apostamos 4 euros a que sale cara. Etc.. Demostrar que la estrategia anterior gana un euro con probabilidad 1.