Salvo afirmación expresa en sentido contrario se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una sub-σ-álgebra, que las funciones son medibles, etc..

1) Lanzamos una moneda lastrada, con probabilidad de sacar cara igual a 3/5. Si sale cara lanzamos un dado equilibrado con cuatro caras numeradas del 1 al 4, y si sale cruz lanzamos un dado equilibrado con seis caras numeradas del 1 al 6. Sea Y el número obtenido. Denotando $X = 1$ si sale cara, $X = 0$ si sale cruz, hallar a) $E(Y|X)$, y b) $E(Y)$.

2) Tenemos un dado equilibrado con 6 caras numeradas del 1 al 6. Lanzamos la primera vez y apuntamos el número x obtenido. A continuación, lanzamos el dado x veces y sumamos los valores y_i obtenidos: $s_x = y_1 + \cdots + y_x$. Hallar $E(X)$, $E(Y_i)$, y $E(S_X)$, donde X es la variable aleatoria "resultado del primer lanzamiento", Y_i el resultado del lanzamiento $1 + i$, y $S_X = \sum_{k=1}^{X} Y_k$. Se asume que todas las tiradas son independientes. Determinar la relación entre las tres medias.

3) a) Enunciar la Ley Fuerte de Los Grandes Números.
b) Consideramos $(0, 1)$ con la medida de Lebesgue, Escribimos $w \in (0, 1)$ usando la expansión decimal habitual. Definimos $X_n(w)$ como el número de sietes que aparecen en las n primeras posiciones de la expansión decimal de w (por ejemplo, $X_3(0.777) = 3, x_3(0.12345) = 0$. Decidir razonadamente si $\lim_n n^{-1} X_n$ converge casi seguro, y en caso de respuesta afirmativa, hallar el límite.
c) Decidir razonadamente si

$$\lim_n \frac{X_n - 10^{-1} n}{n^{2/3}}$$

converge casi seguro, y en caso de respuesta afirmativa, hallar el límite.

4) Calcular las funciones generatrices de probabilidad, de momentos y las funciones características de X cuando X es a) Bernoulli(p), b) Binomial(n, p), c) Poisson(λ). Usar unicidad y la propiedad multiplicativa para concluír que la suma de v.a. independientes con distribución Poisson(λ_i), $i = 1, \ldots, n$, es Poisson$(\sum_1^n \lambda_i)$.

5) Calcular la función generatriz de momentos y la función característica de $X \sim$ Uniforme$(0, 1)$.

6) Calcular la función generatriz de momentos y la función característica de $Z \sim N(0, 1)$.

7) Probar que la función característica de X con media 0 y varianza 1 satisface

$$\phi_X(t) = 1 - \frac{1}{2} t^2 + o(t^2)$$

cuando $t \to 0$. Sugerencia: usar la expansión de Taylor de e^{ir}, donde r es real.

8) Demostrar el TCL usando los ejercicios anteriores, unicidad y la propiedad multiplicativa de las funciones características, y el Teorema de Continuidad de Lévy-Cramér.

9) Para $n = 1, 2, 3, \ldots$, sea $\{X_{n,m}\}_{m=1}^n$ una configuración triangular de v.a., tales que las variables en cada fila son independientes, sea $S_n := \sum_{i=1}^n X_{n,i}$, y sean $0 < a < b < 1$. Supongamos que las variables en la fila n son Bernoulli(p_n), es decir, $P(X_n = 1) = p_n$, $P(X_n = 0) = 1 - p_n$. Usar el Teorema de Berry-Esseen para demostrar que si $a \le p_n \le b$ para todo n, entonces $(S_n - np_n)/\sqrt{np_n(1 - p_n)}$ converge en distribución a $Z \sim N(0, 1)$.

10) Probar que si $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de v.a.i.i.d. en L^2, se cumple la condición de Lindeberg. Sugerencia, usar el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue.

11) Para $n = 1, 2, 3, \ldots$, sea $\{X_{n,m}\}_{m=1}^{n}$ una configuración triangular de v.a., tales que las variables en cada fila son independientes, y sea $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_{n,i}$.
a) Enunciar la condición de Lindeberg.
b) Suponiendo que las variables en la fila n son Bernoulli(p_n), con $p_n = n^{-1/2}$, decidir razonadamente si $(S_n - np_n)/\sqrt{np_n(1-p_n)}$ converge en distribución a $Z \sim N(0,1)$.
c) Sea $s \in (0,1)$. Decidir razonadamente qué sucede si en el apartado anterior, en vez de $p_n = n^{-1/2}$ tenemos $p_n = n^{-s}$.
d) Decidir razonadamente qué sucede si en el apartado b), en vez de $p_n = n^{-1/2}$ tenemos $p_n = n^{-1}$. Sugerencia: recordar la Ley de los Números Pequeños.

12) Probar que la condición de Lyapunov implica la condición de Lindeberg. La condición de Lyapunov nos dice que existe un $\delta > 0$ tal que $\lim_{n\to\infty} Lyap(n,\delta) = 0$, donde

$$Lyap(n,\delta) := \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E|X_k - \mu_k|^{2+\delta}.$$