Para el Lunes 17/3/2014. Se pueden entregar los problemas individualmente o en grupo. Hacerlo en grupo no penaliza.

Salvo afirmación expresa en sentido contrario se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una sub-σ-álgebra, que las funciones son medibles, etc..

Recordatorio: si $0 < p < \infty$, $\|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$, mientras que $\|f\|_\infty$ denota el supremo esencial de $|f|$.

1) Los límites superior e inferior de una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ se definen respectivamente como $\limsup_n A_n := \cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} A_k$ y $\liminf_n A_n := \cup_{n\geq 1} \cap_{k\geq n} A_k$. Determinar que conjunto es más grande. Hallar la relación entre $\limsup_n A_n$ y $\limsup_n \mathbf{1}_{A_n}$. Hacer lo mismo con los límites inferiores.

2) Probar que si $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ converge c. s. a X, entonces para todo $\epsilon > 0$, $P(\limsup_n \{|X_n - X| > \epsilon\}) = 0$.

3) Probar que si para todo $\epsilon > 0$, $P(\limsup_n \{|X_n - X| > \epsilon\}) = 0$, entonces $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ converge casi seguro a X. Sugerencia: Tomar $\epsilon = 1/k$, k natural, y usar el hecho de que la unión numerable de conjuntos de probabilidad cero tiene probabilidad cero.

4) Probar que la convergencia casi seguro implica la convergencia en probabilidad. Sugerencia: Usar alguno de los problemas anteriores.