Para el Lunes 10/3/2014. Se pueden entregar los problemas individualmente o en grupo. Hacerlo en grupo no penaliza.

Salvo afirmación expresa en sentido contrario se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una sub-σ-álgebra, que las funciones son medibles, etc..

Recordatorio: si $0 < p < \infty$, $\|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$, mientras que $\|f\|_\infty$ denota el supremo esencial de $|f|$.

1) Demostrar que si $X := \{X_t\}_{t\in T}$ es una colección uniformemente integrable de variables aleatorias, entonces $\|X\|_1 := \sup_{t\in T} \|X_t\|_1 < \infty$.

2) Sea $Y \in L^1$. Dada la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$, definimos $X_n := E(Y|\mathcal{A}_n)$. Probar que $X := \{X_n\}_{n=0}^\infty$ es una martingala uniformemente integrable, adaptada a $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$. Decidir razonadamente a qué converge.

3) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^\infty$ es una martingala adaptada a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$, entonces para todo $n \geq 0$ tenemos que $\sigma(X_0, \ldots, X_n) \subset \mathcal{A}_n$, y X es una martingala adaptada a $\sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Aquí $\sigma(X_0, \ldots, X_n)$ denota la σ-ágebra más pequeña que hace que todas las funciones $X_0, \ldots, X_n$ sean medibles.

4) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^\infty$ es una submartingala, y $0 < r \leq s \leq \infty$, entonces $\|X\|_r \leq \|X\|_s$, donde $\|X\|_p := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\|_p$.