Para el Miercoles 12/2/2014. Se pueden entregar los problemas individualmente o en grupo. Hacerlo en grupo no penaliza.

Se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, y que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una sub-σ-álgebra.

1) Probar el lema de Kronecker: si $\{x_n\}_1^\infty$ es una sucesión de números reales y $0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots$ satisface $\lim_n b_n = \infty$, entonces la convergencia de $\sum_{i=1}^\infty x_i/b_i$ a un número real implica que $\lim_n b_n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i = 0$.

2) Dar un ejemplo de tres eventos A, B, C independientes 2 a 2, que no sean independientes.

3) Dado C con $P(C) > 0$, decimos que A y B son condicionalmente independientes con respecto a C si $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$. Probar que si $P(B \cap C) > 0$, $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$ es equivalente a $P(A|C) = P(A|B \cap C)$.

4) Consideramos $[0,1)$ con los conjuntos de Borel y la medida de Lebesgue. Sea D_n la colección de subintervalos diádicos en $[0,1)$ de la generación n, es decir, $D_n = \{[0, 2^{-n}), [2^{-n}, 2 \cdot 2^{-n}), \ldots, [1 - 2^{-n}, 1)\}$. Usamos $\mathcal{A}_n$ para denotar la σ-álgebra generada por D_n. Sea $f(x) = x$. Decidir si $\lim_{n\to\infty} E(f|\mathcal{A}_n)$ existe, y en que sentido.

5) Estudiar para $\alpha > 0$ la convergencia en media cuadrática (es decir, en L^2) de la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^\infty$, sabiendo que

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n^\alpha}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$