Problemas Hoja 4.

2) $S_X(\omega) = \sum_{i=1}^{X(\omega)} Y_i(\omega)$

$$= \sum_{j=1}^{6} \sum_{i=1}^{j} Y_i(\omega) \mathbb{1}_{\{X=j\}}(\omega),$$

luego

$$E S_X = E\left(\sum_1^6 \sum_1^j \cdots\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{6} \sum_{i=1}^{j} E Y_i \; E \mathbb{1}_{\{X=j\}}$$ por independencia

$$= \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6} \sum_{i=1}^{j} E Y_i$$ porque $E \mathbb{1}_{\{X=j\}} = P(X=j) = \frac{1}{6}$

$$= \frac{1}{6} \frac{21}{6} \sum_{j=1}^{6} j$$ porque $E Y_i = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6}$

$$= \left(\frac{21}{6}\right)^2$$

$E X = E Y_i = \frac{21}{6}$, luego $E S_X = E X \, E Y_1$.

---

3) b) $\lim_n \frac{X_n}{n} = \frac{1}{10}$ c.s. por la LFGN.

Nótese que $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n \sim B(n, \frac{1}{10})$

$Y_j \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{10}\right)$.

c) Como $Y_j \in L^p \; \forall p \in [1, \infty]$, en particular $Y_j \in L^{\frac{3}{2}}$, luego por el correspondiente resultado sobre tasas de convergencia para v.a. en L^p, $1 < p < 2$, tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_1^n \left(Y_i - \frac{1}{10}\right)}{n^{\frac{2}{3}}} = 0.$$

4) a) $X \sim$ Bernoulli (p)

$$g_X(t) = E(t^X) = t^0(1-p) + tp = 1 + (t-1)p$$

$$\psi_X(t) = E(e^{tX}) = 1-p+pe^t = 1+(e^t-1)p$$

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = 1+(e^{it}-1)p$$

b) $S_n \sim B(n,p)$. Por la propiedad multiplicativa, con $q = 1-p$

$$g_{S_n}(t) = (q+tp)^n$$

$$\psi_{S_n}(t) = (q+e^t p)^n$$

$$\varphi_{S_n}(t) = (q+e^{it}p)^n$$

c) $Y \sim$ Poisson (λ)

$$g_Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda t} e^{-\lambda} = e^{\lambda(t-1)}$$

$$\psi_Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$\varphi_Y(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

5) $$\varphi_X(t) = Ee^{itX} = \int_0^1 e^{itx}\,dx = \frac{e^{it}-1}{it}$$

$$\psi_X(t) = \frac{e^t-1}{t}$$

6) Sea $X \sim N(0,1)$. Completando el cuadrado y usando el hecho de que la integral de una densidad es 1, tenemos

$$\psi_X(t) = Ee^{tX} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$\varphi_{X}(t) = E(e^{itX}) = e^{\frac{(it)^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

7) $EX = 0$, $\operatorname{Var} X = 1 = EX^2$.

$$\varphi_{X}(t) = E(e^{itX}) = E\left(1 + itX - \frac{t^2}{2}X^2 + o(t^2X^2)\right)$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2} EX^2 + o(t^2 EX^2) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

cuando $t \to 0$

8) El TCL para v.a. i.i.d. en L^2.

Suponemos SPDG que $EX_i = 0$, y $\operatorname{Var} X_i = 1$ (si no, en vez de X_i usamos $Y_i = \frac{X_i - EX_i}{\sqrt{\operatorname{Var} X_i}}$).

$$\varphi_{\frac{\sum_1^n X_j}{\sqrt{n}}}(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{\frac{X_j}{\sqrt{n}}}(t) = \prod_{j=1}^n E e^{it\left(\frac{X_j}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$= \prod_1^n E\left(e^{i\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)X_j}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n$$

$\to e^{-\frac{t^2}{2}}$ cuando $n \to \infty$.

Por unicidad, Lévy-Cramér y el ejercicio 6,

$$\frac{\sum_1^n X_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1).$$

9) Como $\|X_{n,m}\|_\infty = 1$

$E|X_{n,m}|^3 \leq 1$.

Como $f(x) = x - x^2$ es cóncava

$\sigma_n = \sqrt{p_n(1-p_n)} \geq \min\{\sqrt{a-a^2}, \sqrt{b-b^2}\}$

luego $\sigma_n^3 \geq C_1$ constante > 0.

Por Berry-Esseen, $\forall x$ y $\forall n$

$$\left| P\left(\frac{\sum_{m=1}^{n} X_{n,m} - n p_n}{\sqrt{p_n(1-p_n)\, n}} \leq x \right) - P(Z \leq x) \right|$$

$$\leq \frac{C}{\sigma^3 \sqrt{n}} \leq \frac{C}{C_1 \sqrt{n}} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Aquí $Z \sim N(0,1)$, $C < \frac{1}{2}$.

10) $s_n^2 = n\sigma^2$,

$$L(n, \varepsilon) = \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^{n} E|X_i - \mu_i|^2 \mathbb{1}_{\{|X_i - \mu_i| \geq \varepsilon s_n\}}$$

$$= \frac{1}{n\sigma^2}\, n\, E\left(|X_1 - \mu|^2 \mathbb{1}_{\{|X_1 - \mu| \geq \varepsilon \sigma \sqrt{n}\}}\right)$$

Como

$$0 \leq |X_1 - \mu|^2 \mathbb{1}_{\{|X_1 - \mu| \geq \varepsilon \sigma\sqrt{n}\}} \leq |X_1 - \mu|^2 \in L^1$$

$\downarrow 0$ c.s.

y

(en realidad, sin casi), por el TCD de Lebesgue, $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} L(n, \varepsilon) = 0.$$

Hoja 7

11) b) Si. Sea $\varepsilon > 0$

$$L(n,\varepsilon) = \frac{1}{n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right)} \sum_{m=1}^{n} \int_{\left\{\left|X_{n,m} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right| \geq \varepsilon(\sqrt{n}-1)^{\frac{1}{2}}\right\}} \left|X_{n,m} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right|^2 dP$$

$$= O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

c) Con el mismo argumento, obtenemos de nuevo convergencia en distribución a $Z \sim N(0,1)$.

d) $s_n^2 = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n} \not\to \infty$, luego $L(n,\varepsilon) \not\to 0$. En este caso

$$\sum_{m=1}^{n} X_{n,m} \xrightarrow[n \to \infty]{D} Y \sim \text{Poisson}(1), \text{ por}$$

la Ley de los Números Pequeños.

12) SPDG suponemos que $\mu_K = 0$ (para que las fórmulas sean más sencillas).

Sea $\delta > 0$ t.q. $Lyap(n,\delta) \to 0$ cuando $n \to \infty$, y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario.

$$Lyap(n,\delta) = \frac{1}{S_n^2 S_n^\delta} \sum_1^n E|X_K|^2 |X_K|^\delta$$

$$\geq \frac{1}{S_n^2 S_n^\delta} \sum_1^n E|X_K|^2 \mathbb{1}_{\{|X_K| \geq \varepsilon S_n\}} |X_K|^\delta$$

$$\geq \frac{1}{S_n^2 S_n^\delta} \sum_1^n E|X_K|^2 \mathbb{1}_{\{|X_K| \geq \varepsilon S_n\}} \varepsilon^\delta S_n^\delta$$

$= \varepsilon^\delta L(n,\varepsilon)$. Como ε y δ son números fijos que no dependen de n, obtenemos el resultado.