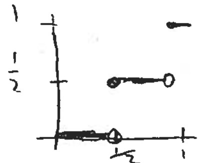


$EX < \frac{1}{2} = m(X)$

PROBABILIDAD I **Examen Parcial** CURSO 2011/12

I) 1) La media de una variable aleatoria puede ser estrictamente menor que su mediana. V F

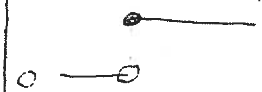
2) Si F es la función de distribución de una variable aleatoria, entonces $F(0) = \lim_{x\downarrow 0} F(x)$. V F

F es continua por la derecha

3) Si F es la función de distribución de una variable aleatoria, entonces $F(0) = \lim_{x\uparrow 0} F(x)$. V F

4) Si $B \subset A$, entonces $P(A|B) \geq P(B)$. V F $P(A|B)=1$

5) Si $B \subset A$, entonces $P(A|B) \geq P(B|A)$. V F



es una función de distribución,

$\lim_{x\uparrow 0} F(x) = 0 < 1 = F(0)$.

II) (2 puntos) Decidir razonadamente (es decir, justificando las respuestas) si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Supongamos que A y B son independientes. Entonces

1) (2 puntos) A^c y B son independientes. Sugerencia, aplicar a B la regla de la probabilidad total.

2) (1 punto) A y B^c son independientes.

3) (2 puntos) A^c y B^c son independientes.

1) $PB = P(B\cap A) + P(B\cap A^c) = PA\,PB + P(B\cap A^c)$, luego

$P(B\cap A^c) = PB - PB\,PA = PB(1-PA) = PB\,PA^c$

2) A y B independientes $\Rightarrow$ B y A independientes

$\underset{\text{por 1)}}{\Longrightarrow}$ B^c y A independientes.

3) A y B indep. $\underset{1)}{\Rightarrow}$ A^c y B indep $\underset{2)}{\Rightarrow}$ A^c y B^c indep.

Alternativa para 3)

$P(A^c\cap B^c) = 1 - P((A^c\cap B^c)^c) = 1 - P(A\cup B)$

$= 1 - (PA + PB - P(A\cap B)) = 1 - PA - PB + PA\,PB$

$= (1-PA)(1-PB) = P(A^c)\,P(B^c)$

III) Con las hipótesis habituales, calcular la probabilidad de que en una familia con 3 hijos
1) (2 puntos) al menos 2 sean varones.
2) (3 puntos) al menos 2 sean varones, sabiendo que al menos uno de los hijos es varón, y al menos hay una hembra. Hijo = 1, Hija = 0. Con las hipótesis habituales los 8 casos son igualmente probables:

0	0	0
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

2) {001, 010, 100, 110, 101, 011}
1) {110, 101, 011, 111}

1) $P(\text{al menos 2 varones}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

2) $P(\text{al menos 2 varones} \mid \text{al menos 1 hija y 1 hijo})$

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\left(\text{ó } \frac{3/8}{6/8} = \frac{1}{2} \right)$.

Comentario: Se puede considerar $\Omega = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, A_i = exactamente i hijas. Pero es erroneo asignar igual probabilidad a estos eventos. $P(A_0) = P(A_3) = \frac{1}{8}$, $P(A_1) = P(A_2) = \frac{3}{8}$, es la asignación correcta con las hipótesis dadas.

IV) (5 puntos) Lanzamos un dado (equilibrado, fair) con 6 caras, hasta que sale el primer número distinto de 6. Es decir, mientras salga 6, lanzamos de nuevo. Calcular la probabilidad de obtener un 5.

$P(\text{siempre sale } 6) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$. Sea Y el resultado del 1^er^ lanzamiento distinto de 6. $Y \in \{1,2,3,4,5\}$, y los 5 casos son igualmente probables, luego $P(Y=5) = \frac{1}{5}$.

Alternativa: Sea X_i el resultado del lanzamiento i-ésimo. $P(Y=5) = P(Y=5 \mid X_1 = 6)$, luego

$$P(Y=5) = P(Y=5 \mid X_1=6)P(X_1=6) + P(Y=5 \mid X_1 \neq 6)P(X_1 \neq 6)$$
$$= P(Y=5)\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\frac{5}{6}.$$

Despejando, $P(Y=5) = \frac{1}{5}$

Alternativa $P(Y=5) = \frac{1}{6} + \sum_{i=2}^{\infty} P(Y=5 \mid X_1 = \dots = X_{i-1} = 6)P(X_1 = \dots = X_{i-1} = 6)$

$$= \frac{1}{6} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^i = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{5}.$$