PROBABILIDAD I **Examen Final, Convocatoria Ordinaria** CURSO 2011/12

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

INSTRUCCIONES: Entregar SOLO estas hojas. De las 5 preguntas propuestas, elegir SOLO 4. Si alguien hace más, se le corregirán las 4 primeras. INFORMACION: Todos los problemas valen 15 puntos. Todos los apartados dentro de un problema valen lo mismo.

I) En un armario hay tres cajones, y en cada cajón, dos sobres. Uno de los cajones tiene 500 euros en cada sobre; otro, 5 euros en cada sobre; y el último, 5 euros en un sobre y 500 en el otro. Abrimos un cajón al azar, y dentro de éste escogemos un sobre al azar. Sabiendo que dicho sobre contiene 5 euros, calcular la probabilidad de que el otro sobre (en el mismo cajón) también contenga 5 euros.

Notación: C_1 : cajón con $(500, 500)$

C_2 : " " $(5, 5)$

C_3 : " " $(500, 5)$.

A = 500 € en el sobre elegido.

A^c = 5 € " " " ".

Con esta notación se pide hallar $P(C_2|A)$.

Por Bayes

$$P(C_2|A) = \frac{PC_2\, P(A|C_2)}{P(A|C_2)PC_2 + P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_3)P(C_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Comentario: La respuesta no es $\frac{1}{2}$, porque si el sobre elegido al azar contiene 5 €, es más probable que venga de C_2 que de C_3.

II) Suponemos que el cociente intelectual X es una variable aleatoria con distribución normal $N(100,16)$, donde 100 es la media y 16 la desviación típica. Bajo dicha hipótesis:
1) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar tenga un cociente intelectual > 120.
2) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar tenga un cociente intelectual > 92.
3) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar entre aquellos con cociente intelectual > 112, tenga un cociente > 120.
4) Hallar t tal que $P(X > t) = 1/10$.
Supongamos a continuacion que sólo conocemos la media (100) y la desviación típica (16) de X, pero nada sobre su distribución.
5) Estimar $P(X \geq 120$ ó $X \leq 80)$.

Notación: $Z \sim N(0,1)$

1) $P(X>120) = P\left(Z > \frac{120-100}{16}\right) = P(Z > 1'25)$
$= 1 - P(Z \leq 1'25) \approx 0'1056$

3) $P(X>112) = P\left(Z > \frac{12}{16}\right) = 1 - P(Z \leq 0'75) \approx 0'2266$

2) $P(X>92) = P\left(Z > -\frac{1}{2}\right) = P\left(Z < \frac{1}{2}\right) \approx 0'6915$

3) (continuado:
$$P(X>120 \mid X>112) = \frac{P(X>120)}{P(X>112)} \approx 0'466$$

4) $P(X>t) = \frac{1}{10} \iff P(X \leq t) = \frac{9}{10} \iff$
$P\left(Z \leq \frac{t-100}{16}\right) = \frac{9}{10}$. El número más próximo a $0'9$ en la tabla es $0'8997$. Tomamos
$\frac{t-100}{16} = 1'28$, $t = 1'28 \cdot 16 + 100 = 120'48$.

5) Usando Chebyshev obtenemos la siguiente cota:
$P(X \geq 120$ ó $X \leq 80) = P(|X-100| \geq 20) = \frac{16^2}{20^2} = \frac{16}{25} = 0'64$.

III) Sean X e Y v.a. con densidad conjunta $f_{(X,Y)}(x,y) = 2xy^2/81$ en $[0,3]^2$, $f_{(X,Y)}(x,y) = 0$ en el resto.

1) Hallar f_X y f_Y.

2) Decidir si X e Y son v.a. independientes.

3) Hallar $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.

4) Hallar la media y la varianza de Y.

5) Hallar $P(X > Y)$.

1) $f_X(x) = \int_0^3 \frac{2xy^2}{3^4} dy = \frac{2}{3^5} xy^3 \Big|_0^3 = \frac{2x}{9}$ en $[0,3]$, $=0$ en el resto

$f_Y(y) = \int_0^3 \frac{2xy^2}{81} dx = \frac{y^2}{81} x^2 \Big|_0^3 = \frac{y^2}{9}$ en $[0,3]$

$=0$ en $[0,3]^c$

2) $f_{(X,Y)} = f_X f_Y$ luego son independientes

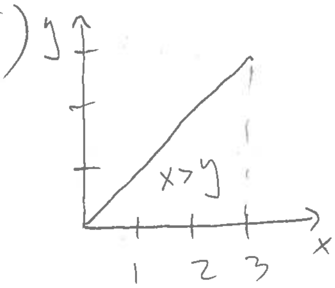
3) Por independencia, $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) = \frac{2x}{9}$ y

$f_{Y|X}(y|x) = \frac{y^2}{9}$ en $[0,3]$.

4) $EY = \int_0^3 \frac{y^3}{9} dy = \frac{9}{4}$, $EY^2 = \int_0^3 \frac{y^4}{9} dy = \frac{27}{5}$

$\operatorname{Var} Y = \frac{27}{5} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{27}{80}$

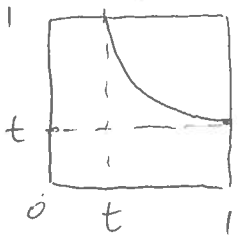
5)



$P(X>Y) = \int_0^3 \int_0^x \frac{2xy^2}{3^4} dy\, dx$

$= \int_0^3 \frac{2}{3^5} x^4 dx = \frac{2}{5}$

IV) Hallar la función de densidad de la variable $Z = XY$, sabiendo que X e Y son v.a. independientes y uniformes en $(0,1)$.



$xy = t \iff x = \frac{t}{y}$, Para $t \in (0,1)$,

$$F_{XY}(t) = P(XY \leq t) = \int_0^t \int_0^1 dx\,dy + \int_t^1 \int_0^{\frac{t}{y}} dx\,dy$$

$$= t + t \int_t^1 \frac{1}{y}\,dy = t - t \log t.$$ $F_{XY}(t) = 0$ si $t \leq 0$,

$F_{XY}(t) = 1$ si $t \geq 1$.

$$f_{XY}(t) = F'_{XY}(t) = 1 - 1 - \log t = -\log t \quad \text{si } t \in (0,1)$$

$$= 0 \quad \text{si } t \in [0,1]^c.$$

V) Sea Ω un conjunto de 5 personas, dos hombres y tres mujeres. Escribimos $X(w) = 1$ si w es varón, $X(w) = 0$ si no, y denotamos por $H(w)$ la estatura de w. Sabiendo que las estaturas de las mujeres son 1'60, 1'70, 1'75, y las de los hombres, 1'75 y 1'85, hallar:

1) $E(H|X)$.
2) $\mathrm{Var}(H|X)$.
3) $E(X|H)$.

1) $E(H|X=0) = \frac{1}{3}(1'6 + 1'7 + 1'75) = 1'68\bar{3} = \frac{5'05}{3}$

$E(H|X=1) = \frac{1}{2}(1'75 + 1'85) = 1'8$

2) $\mathrm{Var}(H|X) = E(H^2|X) - (E(H|X))^2$

$\mathrm{Var}(H|X=0) = \frac{1}{3}(1'6^2 + 1'7^2 + 1'75^2) - \left(\frac{5'05}{3}\right)^2 \simeq 0'00388$

$\mathrm{Var}(H|X=1) = \frac{1}{2}(1'75^2 + 1'85^2) - 1'8^2 = 0'0025$

3) $E(X|H=1'6) = 0 = E(X|H=1'7)$

$E(X|H=1'85) = 1$

$E(X|H=1'75) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$