Hoja 7, nº 17. $P(4 \le X \le 10)$ $(EX = 7, \sigma^2 = 9)$

$= P(-3 \le X - EX \le 3)$

$= P(|X - EX| \le 3) = 1 - P(|X - EX| > 3)$

$= 1 - P(|X - EX| \ge 3) + P(|X - EX| = 3)$

$\ge 1 - \frac{9}{9} + P(|X - EX| = 3) = P(|X - 7| = 3)$

Obtenemos la cota trivial

- $P(|X - 7| \le 3) \ge P(|X - 7| = 3)$ si aplicamos la desigualdad de Chebyshev:

$P(|X - 7| \le 3) = P(|X - 7| < 3) + P(|X - 7| = 3)$

$= 1 - P(|X - 7| \ge 3) + P(|X - 7| = 3)$

$= 1 - \frac{9}{9} + P(|X - 7| = 3)$.

- Cotas para $P(4 < X < 10) = P(|X - EX| < 3)$

$= P(|X - EX|^2 < 9) < 1$, ya que si $P(|X - EX|^2 < 9) = 1$, entonces $E[(X - EX)^2] < 9$.

Sea $a \in (0, \frac{1}{2}]$. Afirmación: $\exists X$ t.q. $P(|X - EX| < 3) = 1 - 2a$ (con $EX = 7$, $\sigma^2 = 9$)

Como $1 - 2a$ toma todos los valores entre $[0, 1)$, el único valor que $P(|X - 7| < 3)$ no puede tomar es 1.

Fijamos $a \in (0, \frac{1}{2}]$, y tomamos $t > 0$. ~~t.q.~~

Sea X definida por

$P(X = EX) = 1 - 2a$, $P(X = EX + t) = a =$

$= P(X = EX - t)$.

Entonces $\operatorname{Var} X = E(X-EX)^2$

$= a t^2 + (1-2a)\cdot 0 + a t^2 = 9$,

$t = \frac{3}{\sqrt{2a}}$

---

18) Hoja 7. Se resuelve del mismo modo, tomando $t = \frac{\sigma}{\sqrt{2a}}$. Ello demuestra que con información sólo de EX y $\operatorname{Var} X$, la desigualdad de Chebyshev no puede mejorarse.