1) Consideramos n lanzamientos independientes de un dado equilibrado con 6 caras. Sea X_i el número de veces que se obtiene el valor i. Decidir razonadamente si la correlación de X_1 y X_6 es positiva, negativa o 0.

2) Consideramos 2 lanzamientos independientes de un dado equilibrado con 6 caras. Sea X_i el resultado del lanzamiento i-ésimo, $i = 1, 2$. Hallar la función de masa de $X_1 + X_2$.

3) Escribiendo $y = y(x)$ (de modo que x es la variable independiente), y con los datos siguientes, hallar la correspondiente recta de regresión $y = ax + b$.
Datos: $(x, y) = (1, 1), (3, 2), (4, 4), (6, 4), (8, 5), (9, 7), (11, 8), (14, 9)$.
Solución: $a = 6/11, b = 7/11$.

4) Probar que el Teorema Central del Límite (o Teorema del Límite Central) implica la ley débil de los grandes números.

5) La sucesión de v.a. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en media de orden p ($p > 0$) a la v.a. X si

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0$$

(en el caso particular $p = 2$ decimos que hay convergancia en media cuadrática).

a) Probar que la convergencia en media de orden p implica convergencia en media de orden s para todo $0 < s < p$, y además implica convergencia en probabilidad.

b) Los recíprocos no son ciertos; proporcionar contraejemplos.

6) Estudiar para $\alpha > 0$ la convergencia en media cuadrática de la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, sabiendo que

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n^\alpha}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

7) Con un generador aleatorio producimos una muestra de tamaño N a partir de una distribución uniforme en (0,1). Dividimos (0,1) en 10 clases de anchura $\frac{1}{10}$.

a) ¿Cual es la distribución del número de elementos que caen en una clase dada?

b) Hallar N tal que con probabilidad $> \frac{1}{2}$, la proporción de valores que caen en esa clase se encuentre entre el $\frac{9}{100}$ y el $\frac{11}{100}$.

8) Se suman 1000 números que se han redondeado a un número entero. Se suponen los errores distribuidos uniformemente en el intervalo $(-0.5, 0.5)$. Calcular aproximadamente la probabilidad de que el error absoluto de la suma de los 1000 números sea menor que cinco.

9) La publicidad de un cierto tipo de baterías dice que tienen una duración media de funcionamiento de 120 horas con una desviación típica de 10.

a) Aplicando el Teorema Central del Límite, hallar la distribución aproximada de $\overline{X}$ = duración media de 400 baterías elegidas al azar.

b) Calcular apoximadamente la probabilidad de que la duración media de 400 baterías supere 110 horas.

c) Calcular el número de baterías necesarias para que su duración media difiera de 120 horas en menos de una hora con probabilidad $\frac{95}{100}$.

d) Si una organización de defensa del consumidor pone a funcionar 400 de esas baterías y obtiene unas duración media de 111 horas ¿parece cierto lo que dice la publicidad?

10) En una población se eligen 4000 individuos al azar para estimar el porcentaje de Rh^+. Calcular aproximadamente la probabilidad de que la proporción resultante difiera del verdadero porcentaje en menos de $\frac{5}{100}$.

11) Se realiza una encuesta para estimar el tanto por ciento p (probabilidad p) del número de personas que apoyan una cierta ley. ¿Cuantas personas deben ser consultadas para que con probabilidad mayor que $\frac{95}{100}$ el porcentaje de la muestra difiera de p menos de $\frac{1}{100}$ en los dos casos siguientes?

a) Se sabe que p es menor que $\frac{30}{100}$.

b) p es completamente desconocido.

12) Se tira un dado 12000 veces. Aproximar la probabilidad de que el número de seises S verifique $1900 < S < 2200$.

13) Se ha observado que, por término medio, el hilo de un telar se rompe 375 veces por cada 100 horas de funcionamiento. Consideramos la v. a. X=número de roturas en 8 horas de funcionamiento.

a) Proponer un modelo de probabilidad para X, indicando las hipótesis en que estaría basado.

b) Si anualmente, el telar funciona 8 horas al día durante 192 días hábiles, calcular aproximadamente la probabilidad de que el número de roturas anuales supere las 500.

14) Sea X_n una sucesión de variables aleatorias independientes tales que

$$P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \qquad k = 0, 1, ...n-1$$

Probar que X_n converge en distribución a una Uniforme en [0,1].

15) Sea X_n una sucesión de variables aleatorias independientes tales que

$$P(X_n = 1) = p \quad P(X_n = 0) = 1-p, \quad 0 < p < 1$$

Estudiar la convergencia en Probabilidad y en media cuadrática de la sucesión

$$Y_n = X_1 X_2 \cdots X_n.$$

16) Consideramos n lanzamientos independientes de un dado equilibrado con 6 caras. Sea X_i el número de veces que se obtiene el valor i. Decidir razonadamente si la correlación de X_1 y X_6 es positiva, negativa o 0.

17) Dada la informacion $E[X] = 7$ y $\mathrm{Var}(X) = 9$, usar la desigualdad de Chebyshev para acotar inferiormente $P(4 \leq X \leq 10)$. Con las mismas hipotesis, hallar los valores máximo y mínimo que puede tomar $P(4 < X < 10)$.

18) Determinar si para toda $\mu \geq 0$, toda $\sigma \geq 0$, y toda $c > \sigma$, existe una v.a. X con media μ y desviación típica σ tal que

$$P(|X-\mu| \geq c) = \frac{\sigma^2}{c^2}.$$

19) Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i.i.d. continuas, con $E[X_1] = 2$ y $\mathrm{Var}(X_1) = 9$. Definimos $Y_i = (0.5)^i X_i, i = 1, 2, ...$. Sean T_n y A_n la suma y la media, respectivamente, de $Y_1, Y_2, ..., Y_n$. Decidir razonadamente si cada una de las sucesiones $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en probabilidad, y en su caso hallar el correspondiente límite.

20) Cierta operación médica resulta fatal el 1% de los casos. Aproximar la probabilidad de que haya al menos dos fallecimientos en 200 operaciones.

21) Se sabe que Angel lleva dos monedas en el bolsillo, una con probabilidad de cara 0.55, y la otra equilibrada. Benito pide a Angel que lanze una moneda 1000 veces, y si salen más de 525 caras solicita jugar usando la otra moneda. Suponiendo que Angel haga los lanzamientos con la moneda equilibrada, aproximar la probabilidad de que Benito erroneamente concluya que la moneda está trucada.

22) En cualquier vuelo una aerolinea aspira a llenar el avión lo máximo posible, sin caer en el over-booking. En media, 10 de cada 300 pasajeros no se presentan en el aeropuerto, independientemente unos de otros. Hallar la probabilidad aproximada de que se produzca over-booking, si la capacidad máxima de un avión es de 300 pasajeros, y la compañia aérea vende 320 billetes.