

- 1) a) Lanzamos un dado equilibrado con 6 caras, y a continuación lanzamos una moneda equilibrada tantas veces como señale el dado. Sea  $X$  el número de caras obtenido. Calcular  $E[X]$  y  $\text{Var}(X)$ .
- b) Repetir el apartado anterior, pero suponiendo que lanzamos dos dados en vez de uno.
- 2) Lanzamos una moneda lastrada, con probabilidad de sacar cara igual a  $3/5$ . Si sale cara lanzamos un dado equilibrado con cuatro caras numeradas del 1 al 4, y si sale cruz lanzamos un dado equilibrado con seis caras numeradas del 1 al 6. Sea  $Y$  el número obtenido. Denotando  $X = 1$  si sale cara,  $X = 0$  si sale cruz, hallar 1)  $E(Y|X)$ , 2)  $E(Y)$ , 3)  $\text{Var}(E(Y|X))$ , 4)  $\text{Var}(Y|X)$ , 5)  $\text{Var}(Y)$ .
- 3) Dadas tres variables aleatorias  $X, Y, Z$  y una función de Borel  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , probar las siguientes afirmaciones:
- a)  $E[Y g(X) | X] = g(X) E[Y|X]$ .
- b)  $E[E[Y|X, Z] | X] = E[Y|X] = E[E[Y|X] | X, Z]$ .
- 4) Dadas dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  con media cero, demostrar las siguientes afirmaciones:
- a)  $X$  y  $E[X|Y]$  tienen correlación positiva.
- b) El coeficiente de correlación de  $Y$  y  $E[X|Y]$  tiene el mismo signo que el de  $X$  y  $Y$ .
- 5) a) Angel y Benito juegan a cara o cruz con una moneda de Angel, una vez por minuto, durante una hora. Quien gana recibe un euro del perdedor. Angel siempre escoge cara, y Benito siempre escoge cruz. Sin que Benito sea consciente de ello, la moneda de Angel está lastrada, con probabilidad  $6/10$  de obtener cara. Hallar la ganancia media de Angel.
- b) Supongamos que Angel gana exactamente lo que la media predice. Benito decide utilizar la aproximación normal para decidir si la moneda está lastrada o no. ¿Qué conclusión debería alcanzar?
- c) Con las hipótesis anteriores, Angel y Benito juegan hasta que llega la novia de Angel, momento en el que la feliz pareja se marcha a bailar a una disco. Si la novia llega al azar, con igual probabilidad de llegar en el minuto  $i = 1, 2, \dots, 60$ , determinar la ganancia esperada de Angel.