1) **a)** Calcular la función generatriz de momentos $M_X(t) := E(e^{tX})$ para todo $t \in \mathbb{R}$, donde $X \sim$ Exponencial(λ). Observese que la convergencia puede fallar si e^{tx} es "demasiado grande". Una forma de evitar esto consiste en utilizar e^{it}, donde $i = \sqrt{-1}$, en lugar de e^t, ya que entonces $|e^{itx}| = 1$. La función característica de X se define como $\varphi_X(t) := M_X(it) := E(e^{itX})$. Calcular $\varphi_X(t)$.

b) Usar el apartado anterior para hallar EX y $\mathrm{Var}(X)$.

2) Usar la función generatriz de momentos $M_X(t) := E(e^{tX})$ de la v.a. $X \sim$ Exponencial(λ), calculada en el problema anterior, para hallar la densidad de la v.a. Y, sabiendo que su función generatriz de momentos es

$$M_Y(s) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-s} + \frac{2}{3}\,\frac{3}{3-s}.$$

3) Calcular la varianza de $X \sim N(0,1)$ usando integración por partes.

4) Sea $X \sim \mathrm{BN}(k,p)$ (binomial negativa con parametros k y p). Hallar su media y su varianza. En particular, hallar la media y la varianza cuando X tiene distribución geométrica.

5) Sea la probabilidad P dada por el doble del area en el triangulo T con vértices $(0,0),(0,1),(1,0)$ (es decir, P es la probabilidad uniforme en T). Si X e Y denotan las coordenadas, primera y segunda respectivamente, de los puntos en T, hallar la funcion de densidad conjunta $f_{(X,Y)}$, las densidades marginales f_X, f_Y, y decidir si X e Y son independientes.

6) Sea $f_{(X,Y)}(x,y) = 6(1-x-y)$ (en el triangulo T definido por $x > 0, y > 0, x+y < 1$) la densidad conjunta de X e Y. Hallar las densidades marginales f_X, f_Y, y decidir si X e Y son independientes.

7) Sea $f_{(X,Y)}(x,y) := ce^{-(x^2-xy+y^2)/2}$ la densidad conjunta de (X,Y), donde $x, y \in \mathbb{R}$. Hallar c (sugerencia: completar el cuadrado). Hallar f_X y f_Y. Decidir si X e Y son independientes o no.

8) Dada $x \in \mathbb{R}$ denotamos por $\langle x \rangle$ su parte fraccionaria. Es decir, $\langle x \rangle \in [0,1)$ y existe un único entero $[x]$ tal que $x = [x] + \langle x \rangle$. Definimos primero la onda cuadrada ψ en $\mathbb{R}$ mediante $\psi(x) := -1$ si $\langle x \rangle \in [0,1/2)$, $\psi(x) := 1$ si $\langle x \rangle \in [1/2,1)$, segundo, definimos $\psi_n(x) := \psi(2^n x)$, y tercero, denotamos por X_n la restricción de ψ_n a $[0,1)$. Las variables aleatorias X_n en $[0,1)$ con la probabilidad uniforme, son independientes, pero en este problema sólo se pide demostrar que son independientes 2 a 2. A las variables X_n se las conoce como funciones de Rademacher.

9) Sea $x = 0.x_1x_2x_3\cdots \in [0,1)$ elegido al azar, donde $0.x_1x_2x_3\ldots$ denota la expansión decimal de x. Definimos $X_i : [0,1) \to \{0,1,\ldots,9\}$ como $X_i(x) = x_i$. Hallar la función de masa de X_i. Decidir razonadamente si las variables aleatorias X_i son independientes.