1) Sea (X, Y, Z) un punto escogido al azar (uniformemente) en el cubo unidad $Q = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$. Hallar la probabilidad de que $f(t) := Xt^2 + Yt + Z$ tenga dos raices reales distintas.

2) Probar que si **X** e **Y** son variables aleatorias independientes, ambas con distribución exponencial de parámetros λ y μ respectivamente, entonces $\min(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tiene una distribución exponencial de parámetros $\lambda + \mu$.

3) Sean **X** e **Y** variables aleatorias i.i.d. con distribución Normal de media 0 y varianza 1.

a) Demostrar que **W**=2**X**-**Y** tiene distribución Normal. Hallar su media y varianza.

b) Hallar la media de $\mathbf{Z}=\frac{\mathbf{X}^2}{\mathbf{X}^2+\mathbf{Y}^2}$ (Sugerencia $\frac{\mathbf{X}^2}{\mathbf{X}^2+\mathbf{Y}^2}$ + "algo" = 1.)

4) Sean **X** e **Y** variables aleatorias independientes. Hallar la distribución de U= $\min(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ en los dos casos siguientes:

a) Ambas tienen distribución geométrica con parámetros p y r.

b) Ambas tienen distribución uniforme en el intervalo $[0, a]$.

5) Dado un vector aleatorio uniformemente distribuido en el triángulo que limitan las rectas

$$x + y = 1, \ \ y - x = 1, \ \ y = 0,$$

calcular, para $x \in (-1, 1)$, $\quad P(\mathbf{Y} \leq \frac{1}{2} \mid \mathbf{X} = x)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{Y} \mid \mathbf{X} = x)$.

6) Sean **X** e **Y** dos variables aleatorias.

a) Hallar dos ecuaciones lineales que relacionen las variables

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y}; \ \ \mathbf{U} = min(\mathbf{X}, \mathbf{Y}); \ \ \mathbf{V} = max(\mathbf{X}, \mathbf{Y}); \ \ \mid \mathbf{X} - \mathbf{Y} \mid .$$

b) Si **X** e **Y** son independientes y geométricamente distribuídas, con parámetros p y r, hallar: $\mathbf{E} \mid \mathbf{X} - \mathbf{Y} \mid$; $\quad \mathbf{E}(\max(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$; $\mathbf{E}(\min(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$.

c) Hacer lo mismo si **X** e **Y** tienen distribución uniforme en el cuadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. En este caso hallar también $\mathbf{E}(\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2)$ y $\quad \mathbf{E}(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^2$.

Sugerencia para **a)** : $\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\mathbf{U}+\mathbf{V} \quad \mid \mathbf{X} - \mathbf{Y} \mid = \mathbf{V} - \mathbf{U}$.

Sugerencia para **b)** : hallar $\mathbf{E}(\mathbf{U})$ y luego calcular $\mathbf{E}(\mathbf{V})$.

Sugerencia para **c)** : Hallar $1 - F_U(u)$ y después la función de densidad de **U**.

7) Sean X e Y v.a.i., con densidades $f_X(x) = 1 - x/2$ en $[0, 2]$, $f_X(x) = 0$ en $[0, 2]^c$, y $f_Y(y) = 2 - 2y$ en $[0, 1]$, $f_Y(y) = 0$ en el resto. Hallar la densidad de $W = X + Y$.