1) Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ variables aleatorias discretas e independientes, geométricamente distribuídas, con parámetros p y q respectivamente. Comprobar que la variable $\mathbf{Z}$ =mínimo $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tiene una distribución geométrica.

2) Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ variables aleatorias discretas independientes, con funciones de masa $\mathbf{P}(\mathbf{X} = k) = \mathbf{P}(\mathbf{Y} = k) = pq^k$, donde $k = 0, 1, 2, ..$ y $0 < p = 1-q < 1$. Demostrar que $\mathbf{P}(\mathbf{X} = k|\mathbf{X}+\mathbf{Y} = n) = \frac{1}{n+1}$.

3) Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ variables aleatorias discretas independientes uniformemente distribuídas, es decir, toman los valores $1, 2, ...N$ con probabilidad $\frac{1}{N}$. Hallar las distribuciones de las variables $\mathbf{U} =$ mínimo $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $\mathbf{V} =$ máximo $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $\mathbf{D} = \mathbf{V} - \mathbf{U}$.

4) Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ variables aleatorias independientes, con distribuciones de Poisson $P(\lambda)$ y $P(\mu)$ respectivamente. Probar que existe una $p \in (0, 1)$ tal que $\mathbf{P}(\mathbf{X} = k|\mathbf{X} + \mathbf{Y} = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, donde $p + q = 1$.

5) La distribución de los pesos de los alumnos varones en una universidad grande (15 000 alumnos varones) es aproximadamente normal, con media $\mu = 75$ kg. y desviación típica 7 kilos.
1) Estimar el número de alumnos con peso mayor que 95 kilos.
2) Estimar el número de alumnos con peso entre 80 y 95 kilos.
3) Estimar el número de alumnos con peso entre 55 y 70 kilos.
4) Estimar el número de alumnos con peso entre 70 y 85 kilos.
Sugerencia: Usar la tabla de la normal.

6) Lanzamos 120 veces un dado equilibrado con 6 caras.
1) Aproximar la probabilidad de obtener 18 cuatros o menos. Usar la distribución binomial para obtener la respuesta exacta y comparar. Respuesta: 0.3557.
2) Aproximar la probabilidad de obtener 14 cuatros o menos. Usar la distribución binomial para obtener la respuesta exacta y comparar. Respuesta: 0.0885.

7) Una de cada 10 tuercas producidas por cierta máquina es defectuosa. Calcular la probabilidad de que entre 10 tuercas elegidas al azar, dos sean defectuosas, usando
1) La distribución binomial. 2) La aproximación de Poisson. 3) La aproximación normal.
Respuesta: 0.1839.

8) Supongamos que tenemos un número grande de particulas radioactivas que decaen con distribución Exponencial(λ). Calcular cuanto tiempo es necesario para que el 75% de las partículas decaiga, sabiendo que la mitad decae durante el primer segundo. Respuesta: 2 segundos.

9) Sean $a, b > 0$. Demostrar que si $X \sim$ Exponencial(λ), entonces $P(X > a+b|X > b) = P(X > a)$. Si pensamos, por ejemplo, que X nos da el momento del fallecimiento de un vaso (de cristal), la igualdad anterior nos dice que el vaso no envejece.

10) La distribución exponencial bilateral tiene función de densidad $f(x) = (c/2)e^{-c|x|}$ para $x \in \mathbb{R}$, donde $c > 0$ es un parámetro de la distribución. Probar que la media y varianza de la misma son 0 y $2/c^2$ respectivamente.

11) La variable aleatoria X tiene función de densidad proporcional a $g(x)$, donde g es la función que cumple, para un cierto entero $n \geq 2$, $g(x) = |x|^{-n}$ si $|x| \geq 1$, $g(x) = 0$ si no. Hallar la función de densidad de X e indicar la forma de su gráfica; determinar los valores de n para los cuales tanto la media como la varianza de X existen.

12) Si X tiene distribución normal con media 0 y varianza 1, hallar la función de densidad de $Y = |X|$ y deducir la media y la varianza de Y.

13) Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución F_X es continua. Probar que la variable aleatoria Y dada por $Y(w) = F_X(X(w))$ está uniformemente distribuida en el intervalo $(0, 1)$.

14) Sea F una función de distribución. Como F es creciente, pero no necesariamente inyectiva, su inversa existe sólo en un sentido generalizado: definimos F^{-1} mediante $F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \geq y\}$. Probar que si U es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $(0, 1)$, la variable aleatoria $X = F^{-1}(U)$ tiene función de distribución F.

15) Sea $X \geq 0$ una variable aleatoria continua. Probar que $E(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))dx$ (Sugerencia: usar Fubini-Tonelli, como en el caso de las sumas).

16) Sea X una variable aleatoria tal que $E(X^2) = 0$, Probar que $P(X = 0) = 1$. Deducir de esto que si una variable aleatoria X tiene varianza cero entonces es constante casi seguramente, es decir, si $E(X) = \mu$, $P(X = \mu) = 1$.

17) Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ variables aleatorias independientes que toman únicamente valores enteros no-negativos. Demostrar que $E(\min(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \sum_{j=1}^{j=\infty} \mathbf{P}(\mathbf{X} \geq j)\mathbf{P}(\mathbf{Y} \geq j)$.

18) Sean X_i, para $i = 1, 2, 3 \cdots, n$, v.a.i.i.d., que toman los valores $+1, -1$ con probabilidades p y q respectivamente, (p+q=1). Hallar la distribución de la variable $Y = X_1 X_2 \cdots X_n$. Dar una expresión sencilla del resultado y calcular explícitamente el valor de $P(Y = 1)$, para $p = \frac{1}{4}, n = 5$.