Recordatorio: con frecuencia, calcular las probabilidades de intersecciones es más fácil que calcular las probabilidades de uniones.

1) Bajo las hipótesis habituales, calcular la probabilidad de que en una familia con 4 hijos,

a) al menos uno sea varón. Respuesta: 15/16.

b) Haya al menos un niño y al menos una niña. Respuesta: 7/8.

2) Dadas 2000 familias con 4 hijos cada una, calcular

a) el número esperado de familias con al menos un niño. Respuesta: 1875.

b) El número esperado de familias con exactamente dos niños. Respuesta: 750.

c) El número esperado de familias sin niñas. Respuesta: 125.

3) Calcular la probabilidad de que lanzando 5 veces un dado no lastrado con 6 caras, salga el 3

a) dos veces. Respuesta: 625/3888.

b) Como máximo, una vez. Respuesta: 3125/3888.

c) Como mínimo, dos veces. Respuesta: 763/3888.

4) Calcular la probabilidad de que lanzando 3 veces un par de dados no lastrados con 6 caras, salga exactamente una vez la suma 9. Respuesta: 64/243.

5) En un examen con preguntas a las que sólo hay que responder verdadero o falso, un alumno poco industrioso responde al azar. Si cada acierto vale un punto y cada error vale cero puntos, determinar la probabilidad de que apruebe. Hallar el número esperado de puntos. Determinar la probabilidad de obtener más de 5 puntos (al menos 6). Respuesta: 193/512.

6) Sea $\mathbf{X}$ una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p. Hallar $E(\sin \frac{\pi X}{2})$.

7) Tenemos seis llaves para abrir una puerta pero solo una llave abre. Probamos con las llaves una tras otra. ¿Cual es el número esperado de intentos que necesitamos? ¿Y si cada vez elegimos una llave al azar?

8) Angel y Benito lanzan cada uno un dado equilibrado de cuatro caras. Asignamos a Angel el máximo de los dos lanzamientos menos 1, y a Benito el mínimo de los dos lanzamientos. Denotando por X e Y los resultados de Angel y Benito respectivamente, hallar las medias y las varianzas de las tres variables aleatorias X, Y, y $X - Y$.

9) Un experimento consiste en tirar un dado equilibrado de seis caras hasta que aparece un seis cuatro veces.

a) Hallar la probabilidad de que el experimento acabe después de exactamente 10 tiradas.

b) Hallar la probabilidad de que el experimento acabe después de exactamente 10 tiradas saliendo 6 en la novena y en la décima tirada.

10) Lanzamos 12 dados equilibrados, con 6 caras cada uno. Hallar la probabilidad de obtener 6 parejas distintas.

11) Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de lanzamientos hasta que sale el primer 4, en un dado equilibrado con 4 caras numeradas del 1 al 4. Hallar la media y la mediana de X.

12) Si el 3 por ciento de las bombillas fabricadas por cierta compañia tienen algún defecto, calcular la probabilidad, usando primero distribución binomial y despues la aproximación de Poisson, de que en una muestra de 100 bombillas, n bombillas tengan algún defecto, para $n = 0, 1, 2, 3, 4$, y para $n < 4$.

13) Sea $\mathbf{X}$ una variable aleatoria con valores $\mathbf{X} = 1, 2, 3, ...$

a) Demostrar que $\mathbf{X}$ es una variable aleatoria Geométrica (p) si y solo si para todo $m = 0, 1, 2, \ldots,$ tenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} > m) = (1 - p)^m,$$

o equivalentemente,

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} > m) = \mathbf{P}(\mathbf{X} > 1)^m.$$

b) Demostrar que $\mathbf{X}$ cumple $\mathbf{P}(\mathbf{X} > m + n|\mathbf{X} > n) = \mathbf{P}(\mathbf{X} > m)$ si y sólo si $\mathbf{X}$ es una distribución geométrica.

14) Sean P_1 y P_2 probabilidades en $(\Omega, \mathcal{A})$. Probar que para todo $t \in [0, 1]$, $tP_1 + (1 - t)P_2$ es una probabilidad.

15) Sean A y B eventos independientes. Decidir razonadamente si A y B^c son independientes. ¿Qué ocurre con A^c y B? ¿Con A^c y B^c?

16) Queremos hallar usar un "valor central" c que sumarice de alguna manera la conducta de la variable aleatoria X. Como la desviación típica nos da una medida de la dispersión de X, podemos considerar que el mejor valor central será aquél que minimice la desviación típica. Es decir, queremos minimizar $(E[(X - c)^2])^{1/2}$. Hallar c.

17) Sea X una variable aleatoria que toma los valores $0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$. Probar que $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$.

18) Dada la variable aleatoria $X(t) = 1/t$ en el intervalo $(0, 1]$ con la probabilidad uniforme, hallar su media y su mediana.

19) Sea $X \sim BN(k, n)$ (binomial negativa). Calcular su media y su varianza.