1) Expresar cada uno de los siguientes eventos en términos de los sucesos A, B y C, así como de las operaciones de complementación, unión and intersección:

a) Por lo menos, uno de los eventos A, B, C ocurre.

b) Como máximo, uno de los eventos A, B, C occurre.

c) Ninguno de los eventos A, B, C occurre.

d) Todos los eventos A, B, C occurren.

e) Exactamente uno de los eventos A, B, C occurre.

f) Los eventos A y B occurren, pero C no.

g) Ó A occurre, ó si no, entonces B tampoco occurre.

Dibujar los diagramas de Venn correspondientes.

2) Hallar $P(A \cup (B^c \cup C^c)^c)$ en cada uno de los casos siguientes:

a) A, B, y C, son eventos mutuamente exclusivos, y $P(A) = 3/7$.

b) $P(A) = 1/2$, $P(B \cap C) = 1/3$, $P(A \cap C) = 0$.

c) $P(A^c \cap (B^c \cup C^c)) = 0.65$.

3) Angel y Benito tienen sendas barajas españolas (40 cartas). Cada uno saca de su baraja una carta al azar (es decir, con iguales probabilidades, e independientemente). Hallar:

a) La probabilidad de obtener al menos un as.

b) La probabilidad de obtener dos cartas del mismo palo.

c) La probabilidad de no obtener ningún as.

d) La probabilidad de no obtener ni una copa ni una espada.

4) Ana y Bea eligen cada una un número al azar, entre 0 y 2. Sean A, B, C, D, los siguientes eventos:
A: La diferencia entre ambos números es al menos 1/3.
B: Al menos uno de los números es mayor que 1/3.
C: Los dos números son iguales.
D: El número de Bea es mayor que 1/3.
Hallar $P(B)$, $P(C)$ y $P(A \cup D)$.

5) Con 12 chicas y 4 chicos se forman al azar 4 grupos de 4 personas. Calcular la probabididad de que haya un chico en cada grupo. Sugerencia: usar la regla del producto.

6) Benito tiene un dado trucado, con 6 caras numeradas del 1 al 6. La probabilidad de las distintas caras es proporcional al número de puntos inscritos en ellas. Hallar la probabilidad de que Benito obtenga con ese dado un número par.

7) Angel y Bea quedan en un lugar determinado entre las doce y la una con el siguiente acuerdo: el primero que llegue espera al otro un cuarto de hora y después se marcha. Si ambos llegan al azar (con probabilidad uniforme, e independientemente) entre las doce y la una, calcular la probabilidad de que se encuentren.

8) Se eligen dos números al azar en el intervalo $[0, 1]$. Calcular la Probabilidad de que con los tres segmentos resultantes se pueda construir un triangulo.

9) Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad. Demostrar las siguientes afirmaciones (en las que A, B y $A_1, ..., A_n$ son sucesos cualesquiera)

a) $P(A \bigcup B) \leq P(A) + P(B)$.

b) $P(\bigcup_{j=1}^{j=n} A_j) \leq \sum_{j=1}^{j=n} P(A_j)$.

c) $P(A \bigcap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

d) $P(\bigcap_{j=1}^{j=n} A_j) \geq \sum_{j=1}^{j=n} P(A_j) - (n-1)$.

10) En una reunión hay 25 personas. Calcular la probabilidad de que celebren su cumpleaños el mismo día del año al menos dos personas. Observación: con frecuencia es más fácil calcular intersecciones que uniones. Sugerencia: calcular la probabilidad del evento complementario.

11) Angel se examina de 14 temas, pero solo se estudia 5. En el momento del examen se eligen dos temas al azar, de los que Angel debe escoger uno para contestarlo. Calcular la probabilidad de que a Angel le toque al menos un tema que se sabe. ¿Cual es el número mínimo de temas que debe preparar para que tenga una probabilidad superior a 1/2 de aprobar?

12) Los coeficientes a, b, c de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se determinan sucesivamente tirando 3 veces un dado equilibrado, con 4 caras numeradas del 1 al 4. Hallar las siguientes probabilidades:

a) Que las raices de la ecuación sean reales.

b) Que las raices de la ecuación sean complejas.

Sugerencia: Considerar cada uno de los posibles valores de b.

13) Inclusión-Exclusión: Probar que $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}, |I|=k} (-1)^{k-1} P(\cap_{i \in I} A_i)$.

14) Emparejamientos al azar: tenemos n cartas, que colocamos al azar en n sobres (en vez de cuidadosamente poner cada carta en su sobre). Calcular la probabilidad de que alguna carta esté en el sobre correcto (es decir, al menos una carta). Estimar dicha probabilidad cuando $n \to \infty$. Comentario. Este es más difícil. Sugerencia: Usar Inclusión-Exclusión. Observar que la probabilidad de que todas las cartas de 1 a k esten en el sobre correcto es $(n-k)!/n!$. Respuesta en el límite: $1 - e^{-1}$.

15) Media o esperanza. Con los datos del problema anterior, calcular el número esperado de emparejamientos al azar, es decir, cuantas cartas esperamos que estén en el sobre correcto. Comentario: este problema es muy fácil.

16) Tenemos un dado equilibrado con 4 caras (numeradas del 1 al 4), y denotamos mediante X_i el resultado del lanzamiento i-ésimo. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son independientes (dos a dos): $A_i = \{X_1 = i\}$, $B_i = \{X_2 = i\}$, $A = \max\{X_1, X_2 = 3\}$, $B = \min\{X_1, X_2 = 2\}$, $C = \{X_1 \leq X_2\}$, $D = \{X_1 + X_2 = 5\}$.

17) Disponemos de dos urnas, U_1, que contiene 6 bolas azules y 8 bolas blancas, y U_2, que contiene 3 bolas azules y 9 bolas blancas. Se sortea con un dado equilibrado de 6 caras la elección de una urna, escogiendose U_1 si salen $1, 2, 3$ o 4, y U_2 en caso contrario. Posteriormente se extrae al azar una bola de esa urna. ¿Cual es la probabilidad de que la bola extraida sea azul? Si la bola extraida resulta ser blanca ¿cual es la probabilidad de que proceda de la urna U_1 ?

18) Enfermedades raras. Ningún test biológico es 100 % preciso. Supongamos que un test para determinar si cierta infección se ha producido, da falsos positivos en un 1 % de los casos, y falsos negativos en un 2 % de los casos. Si una de cada 100 000 personas entre la población general está infectada, determinar la probabilidad de que una persona escogida al azar esté infectada, sabiendo que el test ha dado positivo.

19) Angel y Benito eligen cada uno una sucesión de tres términos, cara o cruz, y a continuación lanzan al menos 3 veces una moneda equilibrada. Gana aquél cuya sucesión sale antes. Escribimos 0 si sale cara, 1 si sale cruz. Angel, astutamente, ofrece a Benito la posibilidad de elegir primero. Benito, inocentemente y pensando que todas las sucesiones tienen la misma probabilidad, elige 000, en vista de lo cual Angel elige 100. Calcular las probabilidades de que gane cada uno de ellos.

20) Con las hipótesis habituales de independencia e igual probabilidad, Angel lanza una moneda dos veces. El dia de la semana en que se realiza cada lanzamiento también es elegido al azar (independientemente y con probabilidad 1/7).

a) Sabiendo que uno de los lanzamientos es cara, determinar la probabilidad de que el otro sea cruz.

b) Sabiendo que el primero de los lanzamientos es cara, determinar la probabilidad de que el otro lanzamiento sea cruz.

c) Sabiendo que el *segundo* de los lanzamientos es cara, determinar la probabilidad de que el otro lanzamiento sea cruz. Respuesta: 1/2.

d) Sabiendo que el primer lanzamiento ha sido realizado en Jueves, determinar la probabilidad de que el otro lanzamiento sea cruz.

e) Sabiendo que uno de los lanzamientos ha sido realizado en Jueves, determinar la probabilidad de que el otro lanzamiento sea cruz.

f) Sabiendo que uno de los lanzamientos es cara y además ha sido realizado en Jueves, determinar la probabilidad de que el otro lanzamiento sea cruz. Respuesta: 14/27.

21) Se supone que sólo una persona de cada 1000 tiene un cierto tipo de sangre, en una población infinita (de modo que elegir sucesivamente a unas cuantas personas no altera las probabilidades).

a) Hallar la probabilidad de que en 3000 personas elegidas al azar no haya ninguna con este tipo de sangre.

b) ¿Cuál es el número mínimo de personas (elegidas al azar) cuya sangre debemos analizar para tener una probabilidad de al menos $\frac{1}{2}$ de que entre ellas haya alguna persona con este tipo de sangre.

22) Una compañía aérea sabe que en general 1/25 de los pasajeros que hacen reservas en un vuelo no se presentan a facturar. La compañía vende 100 reservas para un avión de 98 plazas. Suponiendo que cada uno de esos 100 pasajeros tiene, independientemente de los demás, la misma probabilidad de no presentarse a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que el vuelo parta completo y cuál la de que falte sitio para alguno de los pasajeros?