



MODELIZACIÓN

Examen Final, Convocatoria Extraordinaria

CURSO 2012/13

APELLIDOS
DNI

NOMBRE

INSTRUCCIONES: Se prohíbe el uso de calculadoras, libros, apuntes, teléfonos móviles, y en general, de toda la tecnología moderna (posterior al bolígrafo).

I) (3 puntos) Rachas con una moneda: dos jugadores. Angel y Benito, eligen cada uno una sucesión de caras y/o cruces, de longitud 3 (por ejemplo: cruz cara cara) primero Ángel y después Benito. Una moneda equilibrada es lanzada tantas veces como sea necesario, hasta que sale por primera vez una de las sucesiones de caras-cruces elegidas. Gana el jugador cuya sucesión aparece antes. Angel escoge cara cruz cruz.

A la vista de esta elección, recomendar una sucesión de longitud tres a Benito, para que el juego le resulte favorable. Es decir, para que Benito tenga una probabilidad de ganar $> 1/2$. Modelizar la situación descrita anteriormente mediante un conjunto de estados adecuado. Justificar la recomendación dada a Benito, calculando las respectivas probabilidades de victoria.

$A=100$. B escoge 110 . Esto es ventajoso porque si sale 11 B gana, seguro.

$$S = \{\emptyset, 1, 10, 11, 100, 110\}$$

comprobamos la afirmación: sea $h(i)$ la probabilidad de que B gane cuando empezamos en el estado $i \in S$. Hay que calcular $h(\emptyset)$.

$$1 = h(110), \quad h(11) = \frac{1}{2}h(11) + \frac{1}{2}h(110)$$

$$\Rightarrow h(11) = h(110) = 1$$

$$h(1) = \frac{1}{2}h(11) + \frac{1}{2}h(10) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}h(10)$$

$$h(10) = \frac{1}{2}h(100) + \frac{1}{2}h(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}h(1)$$

$$\Rightarrow h(10) = \frac{1}{3}$$

$$h(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \quad h(\emptyset) = \frac{1}{2}h(1) + \frac{1}{2}h(\emptyset)$$

$$\Rightarrow h(\emptyset) = h(1) = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

Por otra parte, el candidato "natural"
 $B = 010$ no da ventaja.

$$S = \{\emptyset, 1, 0, 10, 01, 100, 010\}$$

$$h(010) = 1$$

$$h(01) = \frac{1}{2}h(010) + \frac{1}{2}h(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}h(1)$$

$$h(0) = \frac{1}{2}h(01) + \frac{1}{2}h(0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}h(1) + \frac{1}{2}h(0) \quad \star$$

$$h(1) = \frac{1}{2}h(10) + \frac{1}{2}h(1) \Rightarrow h(1) = h(10)$$

$$\rightarrow h(0) = h(01)$$

$$h(10) = \frac{1}{2}h(100) + \frac{1}{2}h(01) = \frac{1}{2}h(01)$$

$$h(1) = \frac{1}{2}h(0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}h(1)$$

$$h(1) = \frac{1}{3}, \quad h(0) = \frac{2}{3}$$

$$h(\emptyset) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$