Para entregar el Lunes 8.

1) A y B juegan con una moneda equilibrada a cara (= 0) o cruz (= 1), lanzandola repetidas veces. A escoge la sucesión 011, y B la sucesión 001. Gana la persona cuya sucesión aparece primero. Elegir un conjunto de estados que modele esta situación. Calcular las probabilidades respectivas de ganar.

Una forma (no la única) de resolver este problema es tomar $S = \{\phi, 0, 00, 01, 001, 011\}$, donde ϕ representa la sucesión vacía (aún no hemos empezado a lanzar, o sólo han salido 1's antes del primer 0). Sea $h(i)$ la probabilidad de que gane A (011) empezando en i.

$h(011) = 1$, $h(001) = 0$

$h(00) = \frac{1}{2} h(001) + \frac{1}{2} h(00) \Rightarrow h(00) = 0$

$h(01) = \frac{1}{2} h(0) + \frac{1}{2} h(011) = \frac{1}{2} h(0) + \frac{1}{2}$

$h(0) = \frac{1}{2} h(01) + \frac{1}{2} h(00) = \frac{1}{2} h(01)$

$\Rightarrow h(01) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} h(01)\right] + \frac{1}{2} \Rightarrow h(01) = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow h(0) = \frac{1}{3}$.

Como el estado inicial es ϕ, se pregunta

$h(\phi) = \frac{1}{2} h(0) + \frac{1}{2} h(\phi) \Rightarrow h(\phi) = \frac{1}{3} =$

$= P(A \text{ gana})$, $P(B \text{ gana}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

2) Calcular la duración media del juego en el problema anterior.

Duración media del juego empezando en el estado $i =: h(i)$.

$$h(001) = h(011) = 0$$

$$h(\phi) = \frac{1}{2} h(\phi) + \frac{1}{2} h(0) + 1 \Rightarrow h(\phi) = h(0) + 2$$

$$h(0) = \frac{1}{2} h(00) + \frac{1}{2} h(01) + 1$$

$$h(01) = \frac{1}{2} \underbrace{h(011)}_{=0} + \frac{1}{2} h(0) + 1$$

$$h(00) = \frac{1}{2} h(00) + \frac{1}{2} \underbrace{h(001)}_{=0} + 1 \Rightarrow h(00) = 2$$

Por tanto

$$h(0) = 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} h(0) + 1\right] + 1 = \frac{1}{4} h(0) + \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow h(0) = \frac{10}{3} \Rightarrow h(\phi) = \frac{10}{3} + 2 = \frac{16}{3}$$

3) a) Decidir razonadamente si la matriz doblemente estocástica (¿qué significa eso?)

$$P = \begin{pmatrix} 5/12 & 1/4 & 1/3 \\ 5/12 & 1/4 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable o no.

Entradas ≥ 0, filas y columnas suman 1.

Mediante operaciones con columnas y filas obtenemos

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{12}-\lambda & \frac{3}{12} & \frac{4}{12} \\ \frac{5}{12} & \frac{3}{12}-\lambda & \frac{4}{12} \\ \frac{2}{12} & \frac{6}{12} & \frac{4}{12}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{3}{12} & \frac{4}{12} \\ 1-\lambda & \frac{3}{12}-\lambda & \frac{4}{12} \\ 1-\lambda & \frac{6}{12} & \frac{4}{12}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{3}{12} & \frac{4}{12} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{3}{12} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$= (1-\lambda)\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 0$. Con $\lambda = 0$, $P - \lambda I = P \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ Como las 2 filas $\neq 0$ son lin. indep, $Ker(P-0I)$ tiene dim $=1$, luego 0 no tiene 2 autovectores linealmente independientes. Para diagonalizar necesitamos 3 autovectores linealmente independientes (las columnas de la matriz de cambio de base). Luego P doblemente estocástica $\not\Rightarrow$ P es diagonalizable.

b) Decidir razonadamente si la cadena de Markov definida por P (dada cualquier distribución inicial) es irreducible.

Obviamente sí: $\forall\, i,j \in S$, $i \to j$, ya que $P_{ij}(1) > 0$.

Comentario sobre la hoja 3: Ordenando los autovalores como $1 = \lambda_1 \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots$, los problemas ilustran el hecho de que $O(|\lambda_2|^n)$ controla la velocidad de convergencia de P^n.

1) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$, $|\lambda_2| = 1$ y no hay convergencia de P^n

2) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, convergencia en 1 solo paso

3) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$, la convergencia es bastante rápida. Por ej., $\left(\frac{2}{3}\right)^{14} \simeq \frac{34}{10000} \approx 0$, luego en 2 semanas estamos cerca del equilibrio.