Para entregar el Lunes 11.

A y B juegan hasta que A gana todo el dinero o lo pierde todo. Para jugar usan un dado equilibrado con 4 caras. Si sale 1, se considera empate. Si sale 2, B entrega un euro a A, mientras que si salen 3 o 4, A entrega un euro a B (el juego es favorable a B).

1) Calcular la probabilidad de que gane A si las fortunas iniciales son, A tres euros y B dos.

2) Calcular la duración media del juego.

3) Probar que toda cadena de Markov finita tiene (al menos) una distribución invariante.

Sugerencias:

1) Invocar el Teorema del punto fijo de Brower en $\mathbb{R}^n$ (quien no lo conozca, que recurra a la Wikipedia, o cualquier otra fuente) digamos, para bolas euclídeas, o para compactos convexos.

1.5) Comprobar que el resultado se extiende a cualquier conjunto homeomorfo a la bola euclídea.

2) Notar que el simplex $\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) : x_i \geq 0, x_1 + \cdots + x_{n+1} = 1\}$ es un compacto convexo (en $\mathbb{R}^{n+1}$).

3) Usar lo anterior para obtener el resultado. Se puede utilizar sin demostración el hecho (bastante obvio por otra parte) de que las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita son continuas.