NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

INSTRUCCIONES: Entregad UNICAMENTE esta hoja. Se permiten las abreviaciones razonables.

I) a) (5 puntos) Definir teoría completa. Enunciar y probar el Test de Vaught.

- Teoría completa: 1) Consistente. 2) $\forall \sigma$ (sentencia, no f.b.f.) ó $\Sigma \vdash \sigma$ ó $\Sigma \vdash \neg\sigma$. NO: maximal consistente.
- Test de Vaught: L es numerable (incluyendo símbolos lógicos, variables etc.). Necesario para poder aplicar Löwenheim-Skolem. Si Σ no tiene modelos numerables, la hipótesis "todos los modelos numerables son isomorfos" estaría vacuamente satisfecha, tanto si Σ es completa como si no.

b) (5 puntos) Sea $L = \emptyset$ y sea $\Sigma = \{\sigma_n : n \geq 2, \sigma_n := \exists v_1 \cdots \exists v_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (v_i \neq v_j)\}$. Decidir razonadamente si Σ es completa.

SI, por el test de Vaught. Es importante notar que como $L = \phi$, la definición de isomorfismo de modelos $f: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ($f: A \to B$ es una biyección que preserva las constantes, las funciones y las relaciones) se reduce a $f: A \to B$ es una biyección.

II) (10 puntos) Responder VERDADERO o FALSO, justificando la respuesta: a) $\{\exists x(\varphi \to \psi)\} \models (\exists x\varphi) \to (\forall x\psi)$. b) $\{\exists x(\varphi \to \psi)\} \models (\exists x\varphi) \to (\exists x\psi)$.

Sea $L = \{0, 1\}$, $A = \{0, 1\}$

b) FALSO: Tomamos $\varphi(x) := x = 0$, $\psi(x) := \perp$

$A \models \exists x(\varphi \to \psi)$ ya que $A \models \varphi(1) \to \psi(1)$ (el antecedente es falso). Pero $A \models \exists x \varphi$ y $A \not\models \exists x \psi$.

a) FALSO. Usar el ejemplo anterior.

III) a) (2 puntos) Enunciar el axioma de cuantificación en su versión universal.
b) (2 puntos) Enunciar la regla de generalización $G_\forall$.
c) (6 puntos) Probar (formalmente, sin usar completitud) que $\{\varphi\} \vdash \forall x\varphi$.

a) Si t puede sustituir a x en φ,
$\forall x\, \varphi \to \varphi(t/x)$ (<u>No</u> $\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(t/x)$).

b) Si x no aparece libre en φ, de
$\varphi \to \psi$ deducimos $\varphi \to \forall x\, \psi$.

<u>NO</u>: 1) Si x aparece ligada ...
2) $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\, \psi)$ no es una regla de deducción.