III) (10 puntos) Decidir razonadamente si $\{\forall x \forall y \phi(x,y)\} \vdash \forall y \forall x \phi(x,y)$, y en caso de respuesta afirmativa, demostrarlo, enunciando de modo completo todos los axiomas, teoremas, reglas de deducción, etc, que se sean utilizados.

SI. Usamos el siguiente teorema, preguntado en la hoja 5 y en el segundo parcial: $\varphi \vdash \forall x \varphi$.

1) $\forall x \forall y \varphi(x,y)$ Premisa

2) $\forall x \forall y \varphi(x,y) \to \forall y \varphi(x,y)$ Axioma de cuantificación (x puede sustituir a x).

3) $\forall y \varphi(x,y)$ 1, 2, M.P.

4) $\forall y \varphi(x,y) \to \varphi(x,y)$ Axioma de cuantificación (y puede sustituir a y).

5) $\varphi(x,y)$ 3, 4, M.P.

6) $\forall x \varphi(x,y)$ Teorema $(\varphi \vdash \forall x \varphi)$

7) $\forall y \forall x \varphi(x,y)$ "

Alternativamente, bastaba notar que para toda L-estructura $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \models \forall x \forall y \varphi(x,y)$
$\iff \forall a,b \in A$, $\varphi(\bar{a},\bar{b})$ es cierta
$\iff \mathfrak{a} \models \forall y \forall x \varphi(x,y)$, e invocar completitud.

IV) (10 puntos) Sea L un lenguaje de primer orden, y sea Σ una L-teoría que admite modelos de cardinalidad p por cada primo p. Decidir razonadamente si Σ tiene modelos de cardinalidad infinita.

Añadimos a Σ las sentencias

$$\sigma_n := \exists v_1 \dots \exists v_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (v_i \neq v_j), \quad n \geq 2.$$

Como Σ tiene modelos de cardinalidad $\geq n$ para cada $n \geq 2$, cualquier subconjunto finito de $\Sigma \cup \{\sigma_n : n \geq 2\}$ tiene un modelo. Por compacidad, $\Sigma \cup \{\sigma_n : n \geq 2\}$ tiene un modelo, necesariamente infinito, que trivialmente es modelo de Σ.

V) (10 puntos) Sea L un lenguaje de primer orden, y sea Σ una L-teoría que admite modelos de cardinalidad numerable infinita, todos los cuales son isomorfos. Decidir razonadamente si Σ tiene modelos de cardinalidad no numerable, y en caso de respuesta afirmativa, si todos ellos deben ser isomorfos.

Por el Teorema generalizado de Lowenheim-Skölem Σ tiene modelos de cualquier cardinalidad infinita. Naturalmente, modelos de distintas cardinalidades no pueden ser isomorfos.

También se puede argumentar directamente por compacidad, como en la demostración del teorema generalizado de Lowenheim-Skölem: dado un cardinal $\alpha > \omega = \text{card}(\mathbb{N})$, añadimos a L las constantes $\{c_\beta : \beta < \alpha\}$, y a Σ los axiomas $c_\beta \neq c_\gamma$, para todo par (β, γ) con $\beta < \gamma < \alpha$.