Para entregar el 11 de Diciembre.

1) Dada la MT con alfabeto $\{B, 1, 2\}$, definida por $\{(q_0\ 1\ 2\ q_0), (q_0\ 2\ D\ q_0), (q_0\ B\ D\ q_0)\}$, determinar su output cuando el input es $1\ 1\ B\ B\ 1\ B\ 2\ B$ (el resto de la cinta son $B's$). Describir en general que hace esta MT, y si se detiene el algún momento o no.

2) Definimos la función $Pair : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ (ver p. 85 del libro) como

$$Pair(x, y) := \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x.$$

Probar que $Pair$ es bijectiva. Nótese que dado el valor $Pair(x, y)$, x e y pueden hallarse algorítmicamente mediante minimización acotada.

Los siguientes problemas proporcionan una "construcción" moderadamente explicita (Zorn) de modelos no estándar de los naturales. Consideramos probabilidades P finitamente aditivas, que sólo toman los valores 0 y 1.

3) Sea P una probabilidad finitamente aditiva, definida en un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{N}$, con valores en $\{0, 1\}$. Los conjuntos con probabilidad 1 forman un *filtro*. Definir *filtro* sin utilizar probabilidades, y probar que las dos definiciones coinciden.

4) Probar que todo filtro de subconjuntos de un conjunto S, puede extenderse a un ultrafiltro (a un filtro maximal con respecto a la inclusión) en S. Sugerencia: Zorn.

5) Probar que si U es un ultrafiltro en S, para todo $A \subset S$, o $A \in U$ o $A^c \in U$.

6) Probar que si U es un ultrafiltro en S, y $A_1 \cup \cdots \cup A_n = S$, entonces existe una $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $A_j \in U$.

7) Sea $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ un producto cartesiano de conjuntos no vacios, y sea U un ultrafiltro en $\mathbb{N}$. Para $x, y \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, definimos $x \sim y$ si x e y son iguales casi seguro, es decir si $\{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\} \in U$. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Al conjunto $\mathcal{U} := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n / \sim$ se le denomina *ultraproducto*.

8) Tomando $X_n = \mathbb{N}$ para todo n en la construcción anterior, probar que $\mathcal{U}$ es un modelo de los axiomas de Peano. Sugerencia: Buscar en la literatura el Teorema Fundamental de los Ultraproductos, de Łoś, e invocarlo.

9) Probar que si el ultrafiltro U contiene a todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ con complemento finito, entonces existe una $c \in \mathcal{U}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, c > n$. Sugerencia: tomar $c_n = n$.