Para el Jueves 27/9/2018. Se pueden entregar ejercicios individualmente o en grupo. Hacerlo en grupo no penaliza.

Asumimos genérica e informalmente la no trivialidad. Por ejemplo, cuando hablamos de conjuntos, lenguajes, etc., suponemos que no son vacíos (salvo que explícitamente se diga lo contrario), cuando hablamos de fórmulas suponemos que están bien formadas, etcetera. En caso de duda, consultar con el instructor. En las demostraciones formales, usar TODOS los paréntesis.

Comentarios terminológicos: Hablaremos de axiomas tanto para referirnos a axiomas como a esquemas de axiomas, cuando nos parezca que no se crea confusión. También hablamos de axiomas para referirnos a las premisas de una teoría, por ejemplo, al hablar de los axiomas de la aritmética $\underline{N}$, o los de la teoría de los grupos. Notesé que en estos dos últimos supuestos los axiomas son realmente axiomas, y no esquemas.

**1)** Con el lenguaje de primer orden $L_G =< e, \cdot >$ y los tres axiomas de la Teoría de los grupos $\Sigma_G := \{\forall x \forall y \forall z\ ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)), \forall x\ (e \cdot x = x), \forall x \exists y\ (y \cdot x = e)\}$ (asociatividad, existencia de una identidad por la izquierda, y existencia de un inverso por la izquierda) demostrar que un inverso por la izquierda también lo es por la derecha, que cada elemento tiene un único inverso, que la identidad por la izquierda es única, y que también lo es por la derecha. Una vez demostrado este resultado, extendemos el lenguaje $L_G$ a $L_{Gr} =< e, \cdot, ^{-1} >$ para designar a $x^{-1}$ como el único inverso de $x$.

**2)** El lema de legibilidad única nos dice que las fórmulas bien formadas no son ambiguas, pueden leerse de un único modo. Reescribir las fórmulas que aparecen a continuación en notación polaca, usando la notación estándar, y las que aparecen en notación estándar, en polaca.
a) $\vee \neg \to p\ q \leftrightarrow r\ p, \quad \to \to \wedge \to p\ q\ \vee q\ r\ \vee p\ r\ \neg \vee q\ s.$
b) $(q \to (p \to q)), \quad ((p \leftrightarrow q) \to ((\neg\, q) \vee r)).$
Hallar el árbol de descomposición de las fórmulas en b).

**3)** Sea $\phi$ una fórmula (bien formada). Probar que el número de paréntesis izquierdos en $\phi$ es igual al número de paréntesis derechos. Sugerencia, usar inducción.

**4)** Demostrar la parte no trivial del lema de legibilidad única: si $(\phi * \psi)$ es una fbf, donde $*$ es una conectiva binaria, y $(\phi * \psi) = (\phi' *' \psi')$, entonces $\phi = \phi'$, $* = *'$, y $\psi = \psi'$.

**5)** Con el lenguaje $L = A \cup \{\neg, \to\}$, $A \neq \emptyset$, la regla de deducción modus ponens, y los axiomas
1. $(\phi \to (\psi \to \phi))$,
2. $((\phi \to (\psi \to \tau)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \tau)))$, y
3. $(((\neg\phi) \to (\neg\psi)) \to (((\neg\phi) \to \psi) \to \phi))$,

probar que
a) $\vdash (p \to p)$,
b) $\vdash (((\neg p) \to p) \to p)$,
c) $\{(p \to q), (q \to r)\} \vdash (p \to r)$.