LÓGICA | Ejercicio hecho en clase | CURSO 2018/19

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

INSTRUCCION: Entregad UNICAMENTE esta hoja.

I) a) (2 puntos) Enunciar el lema de Zorn.
a) (2 puntos) Definir teoría completa.
b) (6 puntos) Enunciar y probar el Teorema de Lindenbaum.

Comentarios: En el lema de Zorn, algunas personas pedían que toda cadena tuviese un supremo. Esto no es lo mismo que requerir la existencia de una cota superior. P. ej. $P = (0,1) \cup (2,3] \subset \mathbb{R}$, $(0,1)$ es una cadena en P con cota superior (p. ej. 3) pero sin supremo.
En la def. de teoría completa es importante indicar la consistencia, y en el teor. de Lindenbaum, que la teoría maximal consistente es completa. Recordad que usamos la teoría para definir el modelo. Luego M tiene que ser consistente y $\forall \varphi \in FBF$, decidir si $M \vdash \varphi$ ó $M \vdash \neg\varphi$ (pero no ambas).

II) (10 puntos) Sean φ y τ fórmulas bien formadas. Decidir razonadamente si existe una demostración formal de la fbf $(((\varphi \to \varphi) \to \tau) \to (\varphi \to \varphi))$, enunciando todos los teoremas que se usen.

Como el consecuente $(\varphi \to \varphi)$ es una tautología (obvio) toda la implicación lo es. Por completitud 1 ($\vdash \varphi \iff \models \varphi$) tenemos $\vdash \varphi$.

Otra forma de probar $\vdash \varphi$ es exhibir explícitamente una demostración formal:

1) $(p \to p)$ Teorema

2) $((p \to p) \to (((\varphi \to \varphi) \to \tau) \to (\varphi \to \varphi)))$ Axioma de introducción de implicaciones

3) $(((\varphi \to \varphi) \to \tau) \to (\varphi \to \varphi))$, 1, 2, M.P.

III) (10 puntos) Responder verdadero o falso, justificando la respuesta. Si reemplazamos $(\varphi \to \varphi)$ en $(((\varphi \to \varphi) \to \tau) \to (\varphi \to \varphi))$ por φ, para cualquier φ, siempre obtenemos una tautología.

FALSO. Basta tomar como φ cualquier contradicción para obtener una contradicción. P.ej., si $\varphi = \bot$,

$(((\bot \to \bot) \to \tau) \to (\bot \to \bot))$ es una tautología, por II), pero

$((\bot \to \tau) \to \bot)$ es una contradicción, ya que el antecedente siempre es verdadero y el consecuente siempre falso.