II) (5 puntos) Dadas las variables proposicionales p y q, hallar fórmulas bien formadas (incluyendo todos los paréntesis) tautológicamente equivalentes a $(\neg p)$ y a $(p \vee q)$, utilizando únicamente las conectivas en $\{\rightarrow, \perp\}$. Probar dicha equivalencia.

$(\neg p) \equiv (p \rightarrow \perp)$, $(p \vee q) \equiv ((p \rightarrow \perp) \rightarrow q)$.

Para demostrar la equivalencia, basta escribir las correspondientes tablas de verdad

p	$(\neg p)$	$(p \rightarrow \perp)$
0	1	1
1	0	0

p	q	$(p \vee q)$	$(p \rightarrow \perp)$	$((p \rightarrow \perp) \rightarrow q)$
0	0	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	1	1	0	1

III) (5 puntos) Sea L un lenguaje de la Lógica Proposicional y sea q una variable en dicho lenguaje. Probar que si la L-teoría $\Sigma \vdash q$, entonces para toda fbf ϕ, $\Sigma \vdash \phi \rightarrow q$.

Hay varias formas de probar este resultado

1) $\Sigma \vdash q \Rightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash q \Rightarrow \Sigma \vdash (\varphi \rightarrow q)$ por el teorema de la deducción.

2) Usar completitud: si $\Sigma \vdash \perp$ entonces Σ prueba todas las fórmulas, y en particular, $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow q)$. Si $\Sigma \nvdash \perp$, entonces Σ tiene modelos. Para todo modelo v de Σ, $v(q)=1$, luego $v(\varphi \rightarrow q)=1$, al ser v una valoración booleana, luego $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow q)$ por completitud.

3) Como $\Sigma \vdash q$, tenemos la siguiente demostración formal:

1) q
2) $(q \rightarrow (\varphi \rightarrow q))$ Tautología
3) $(\varphi \rightarrow q)$, 1, 2 MP.

IV) a) (5 puntos) Definir "teoría completa". Sea L un lenguaje de la Lógica Proposicional, sea v una valoración Booleana, y sea Σ la L-teoría definida mediante $\Sigma := \{\phi \in FBF(L) : v(\phi) = 1\}$. Decidir razonadamente si Σ es una teoría completa.
b) (5 puntos) Sea $\Sigma := \{p, q, (p \to r)\}$, donde $p, q,$ y r son variables proposicionales. Decidir razonadamente si Σ es recursiva. Decidir razonadamente si Σ es decidible.

a) Σ es completa si es consistente y para toda fbf φ, ó $\Sigma \vdash \varphi$ ó $\Sigma \vdash (\neg\varphi)$.

$\Sigma := \{\varphi : v(\varphi) = 1\}$ es consistente porque tiene un modelo (v), y dada cualquier fbf φ, ó $v(\varphi) = 1$, en cuyo caso $\varphi \in \Sigma$ y $\Sigma \vdash \varphi$, ó $v((\neg\varphi)) = 1$, en cuyo caso $(\neg\varphi) \in \Sigma$ y $\Sigma \vdash (\neg\varphi)$.

b) Σ es recursiva: para saber si $\varphi \in \Sigma$ ó $\varphi \notin \Sigma$, de manera algorítmica, simplemente comprobamos si $\varphi = p$ ó $\varphi = q$ ó $\varphi = (p \to r)$.
También es decidible: hay un algoritmo que nos dice, para toda fbf φ, si $\Sigma \vdash \varphi$ o si $\Sigma \nvdash \varphi$. El algoritmo es el siguiente: dada φ, sólo tiene un número finito de variables proposicionales. Consideramos todas las valoraciones booleanas v sobre dichas variables que además satisfagan $v(p) = 1$, $v(q) = 1$, y $v((p \to r)) = 1$. Si para estas valoraciones se cumple $v(\varphi) = 1$, por completitud, $\Sigma \vdash \varphi$. Si existe una tal v con $v(\varphi) = 0$, entonces $\Sigma \nvdash \varphi$ (completitud).

OJO: Si $s \neq p, q, r$ es una variable proposicional, entonces $\Sigma \nvdash s$ y $\Sigma \nvdash (\neg s)$, luego Σ no es una teoría completa.

V) En el problema V se puede ser informal con los paréntesis, siempre que ello no conduzca a confusión.

a) (2 puntos) Enunciar el axioma de cuantificación sobre $\forall$.

b) (2 puntos) Enunciar la regla de generalización sobre $\forall$.

c) (3 puntos) Sea $\phi(x)$ una fbf en la que ninguna variable distinta de x aparece libre, y sea v una variable que no aparece en $\phi(x)$. Decidir razonadamente si $\vdash \forall x\phi(x) \to \forall v\phi(v)$.

d) (3 puntos) Con las mismas hipótesis que en el apartado c), decidir razonadamente si $\vdash \exists x\phi(x) \to \forall v\phi(v)$.

c) Por el axioma de cuantificación

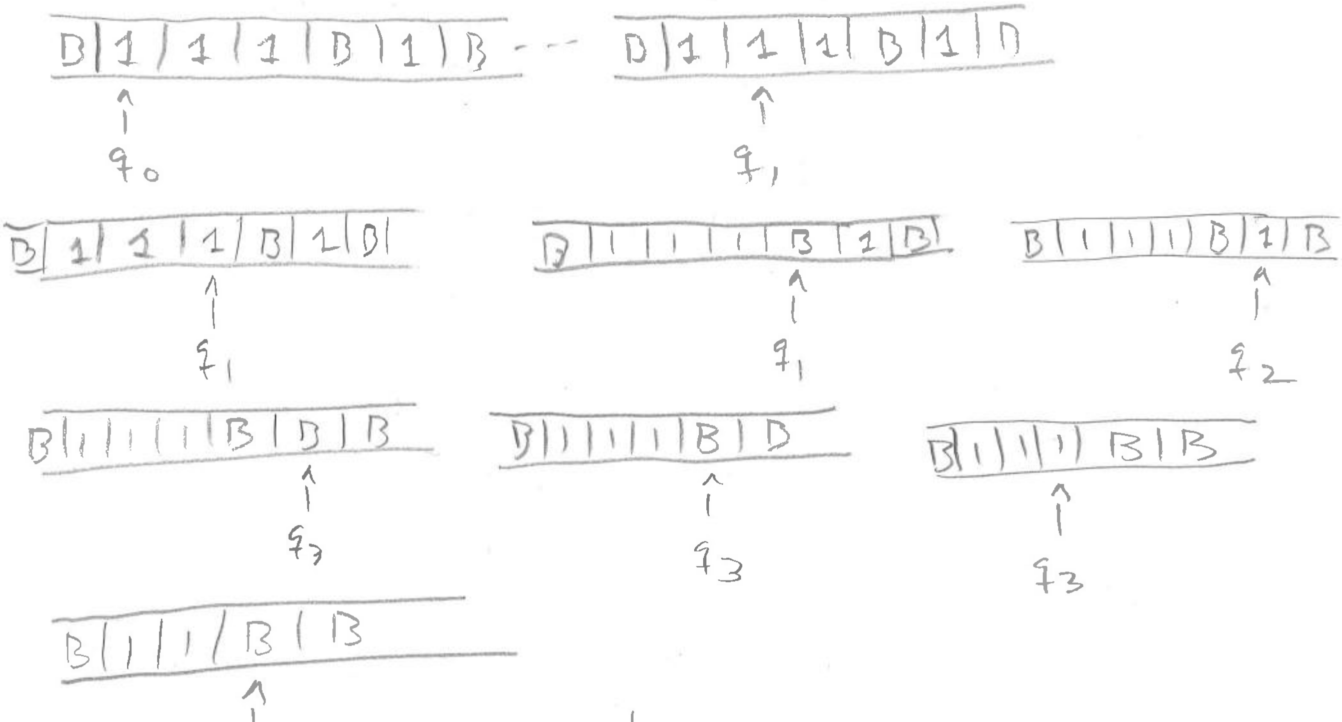
$\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(v/x)$, ya que v puede sustituir a x en φ. Por la regla de generalización, de $\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(v)$ deducimos $\forall x\, \varphi(x) \to \forall v\, \varphi(v)$, ya que v no aparece libre en φ.

Por tanto, $\vdash \forall x\, \varphi(x) \to \forall v\, \varphi(v)$ es cierto.

d) Falso. Basta encontrar un contraejemplo.

Sea $A = \{0,1\}$, $\varphi(x) := (x=0)$. Entonces $\exists x\, \varphi(x)$ es cierta pero $\forall v\, (v=0)$ es falsa.

VI) (10 puntos) Sea MT una Máquina de Turing con alfabeto $\{B, 1\}$, definida por $\{(q_0\ B\ D\ q_1)$, $(q_0\ 1\ D\ q_1), \{(q_1\ 1\ D\ q_1), \{(q_1\ B\ D\ q_2), \{(q_2\ B\ D\ q_2), \{(q_2\ 1\ B\ q_3), \{(q_3\ B\ I\ q_3), (q_3\ 1\ B\ q_4)\}$. Supongamos que MT actua sobre el input 1 1 1 B 1 B (el resto de la cinta sólo contiente B's). Decidir de manera razonada si MT se detiene o no, y en caso de respuesta afirmativa, determinar el output.



q_4 y se detiene, ya que ninguna cuaterna empieza con (q_4 B ...).

Con este input, la MT ha restado 1 al "3" inicial.