Para entregar el 11 de Diciembre.

1) Usando el lenguaje $L(\underline{N})$ y los axiomas $\underline{N}$ de la página 95 del libro, decidir razonadamente si $w+w$ con las definiciones naturales es un modelo de $\underline{N}$. Aquí $w+w := \{(i,n) : i = 0,1, n \in \mathbb{N}\}$ se ordena lexicográficamente, de modo que $(0,n) < (1,m)$; las definiciones naturales son, para la función sucesor, $S((i,n)) = (i, S(n)) = (i, n+1)$, para la suma, $(0,a)+(0,b) = (0,a+b)$, $(1,a)+(1,b) = (1,a+b)$, $(0,a)+(1,b) = (1,a+b) = (1,a)+(0,b)$, y para el producto, $(i,a)\cdot(j,b) = (i\cdot j, a\cdot b)$.

2) Repetir el problema anterior, pero con el siguiente cambio en la suma: en vez del máximo, para la primera entrada de la suma usamos la primera entrada del primer sumando, es decir, $(0,a)+(1,b) = (0,a+b)$, $(1,a)+(0,b) = (1,a+b)$.

3) Con el lenguaje $L(\underline{N})$ y los axiomas $\underline{N}$ de la página 95 del libro, decidir razonadamente si $\underline{N} \vdash \forall x(x = 0 + x)$.

4) Dada la MT con alfabeto $\{B,1,2\}$, definida por $\{(q_0\ 1\ 2\ q_0), (q_0\ 2\ D\ q_0), (q_0\ B\ D\ q_0)\}$, determinar su output cuando el input es $1\ 1\ B\ B\ 1\ B\ 2\ B$ (el resto de la cinta son $B's$). Describir en general que hace esta MT, y si se detiene el algún momento o no.

5) Definimos la función $Pair : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ (ver p. 85 del libro) como

$$Pair(x,y) := \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x.$$

Probar que $Pair$ es bijectiva. Nótese que dado el valor $Pair(x,y)$, x e y pueden hallarse algorítmicamente mediante minimización acotada.