Para el Jueves 30/11/2017.

1) Sea L el siguiente lenguaje de primer orden con igualdad: las constantes de L son $\{\underline{n} : n \in \mathbb{N}\}$, la única función unaria, S_1, las funciones binarias, $+_1$ y $\cdot_1$, y la relación binaria $<_1$ (los subrayados y subindices están para distinguir los símbolos de sus interpretaciones habituales). De nuevo, consideramos como versión oficial de los axiomas de Peano los N1-N9 p. 95 del libro, junto con el esquema de axiomas de la p. 107 (inducción), expresados en el lenguaje L de la forma obvia.

a) Sea Σ_1 la teoría, en el lenguaje L, que se obtiene al añadir a los axiomas de Peano la coleccion $\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde ψ_n es la fbf $\exists x(\underline{n} <_1 x)$. Decidir razonadamente si Σ_1 es consistente. De modo más específico, decidir razonadamente si Σ_1 tiene un modelo. Aún más específicamente, decidir si el modelo estándar $\mathcal{N}$ (los números naturales de toda la vida, en cuya existencia todos creemos) es un modelo de Σ_1. De existir algún modelo, decidir razonadamente si es único.

b) Sea L_c el lenguaje de primer orden que se obtiene al añadir a L una nueva constante c, y sea Σ_2 la teoría, en el lenguaje L_c, que se obtiene al añadir a los axiomas de Peano la coleccion $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde ϕ_n es la fbf $\underline{n} <_1 c$. Decidir razonadamente si Σ_2 es consistente. De modo más específico, decidir razonadamente si Σ_2 tiene un modelo. Decidir si el modelo estándar $\mathcal{N}$ (los números naturales de toda la vida, en cuya existencia todos creemos) es un modelo de Σ_2. De existir algún modelo, decidir razonadamente si es único.

2) Usando el lenguaje $L(\underline{N})$ y los axiomas $\underline{N}$ de la página 95 del libro junto con el esquema de inducción matemática (p. 107), probar que 0 es una identidad a la izquierda, es decir probar la sentencia $\forall x(x = 0 + x)$. Usamos $\underline{n}$ como abreviación del término constante $S(S(\cdots(S(0))\cdots))$, donde S aparece n veces. Probar en $\underline{N}$ que $\underline{n} = 0 + \underline{n}$. Meditad sobre la pregunta de si inducción es necesaria para probar $\forall x(x = 0 + x)$ o no, es decir, si basta $\underline{N}$ para obtener el resultado.

3) Usando el lenguaje $L(\underline{N})$ y los axiomas $\underline{N}$ de la página 95 del libro junto con el esquema de inducción matemática (p. 107), probar que $\forall x \forall y(x + y = y + x)$.