

Para el Lunes 30/10/2017. Se pueden entregar ejercicios individualmente o en grupo. Hacerlo en grupo no penaliza.

Asumimos genérica e informalmente la no trivialidad. Al escribir fórmulas, se permiten las abreviaciones razonables.

1) Usamos $\phi \models \psi$ como abreviación de $\{\phi\} \models \psi$. Probar o refutar:

- a) $\exists x(\phi \vee \psi) \models (\exists x\phi) \vee (\exists x\psi)$. Sugerencia: Probar.
- b) $(\exists x\phi) \vee (\exists x\psi) \models \exists x(\phi \vee \psi)$. Sugerencia: Probar.
- c) $\exists x(\phi \wedge \psi) \models (\exists x\phi) \wedge (\exists x\psi)$. Sugerencia: Probar.
- d) $(\exists x\phi) \wedge (\exists x\psi) \models \exists x(\phi \wedge \psi)$. Sugerencia: Refutar.
- e) $\exists x(\phi \rightarrow \psi) \models (\exists x\phi) \rightarrow (\exists x\psi)$. Sugerencia: Refutar.
- f) $(\exists x\phi) \rightarrow (\exists x\psi) \models \exists x(\phi \rightarrow \psi)$. Sugerencia: Probar.
- g) $\exists x(\phi \rightarrow \psi) \models (\forall x\phi) \rightarrow (\exists x\psi)$. Sugerencia: Probar.
- h) $(\forall x\phi) \rightarrow (\exists x\psi) \models \exists x(\phi \rightarrow \psi)$. Sugerencia: Probar.
- i) $\phi \models \forall x\phi$. Sugerencia: Probar.
- j) $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \models (\forall x\phi) \rightarrow (\forall x\psi)$. Sugerencia: Probar.
- k) $(\forall x\phi) \rightarrow (\forall x\psi) \models \forall x(\phi \rightarrow \psi)$. Sugerencia: Refutar.
- l) $(\exists x\phi) \rightarrow (\forall x\psi) \models \forall x(\phi \rightarrow \psi)$. Sugerencia: Probar.
- m) $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \models (\exists x\phi) \rightarrow (\exists x\psi)$. Sugerencia: Probar.

2) Tomando \exists como abreviación de $\neg\forall\neg$, probar que el axioma de cuantificación para \forall implica la siguiente versión para \exists : si t puede sustituir a x en ϕ , entonces $\phi(t/x) \rightarrow \exists x\phi(x)$. Del mismo modo, tomando \forall como abreviación de $\neg\exists\neg$, probar que el axioma de cuantificación para \exists , “si t puede sustituir a x en ϕ , entonces $\phi(t/x) \rightarrow \exists x\phi(x)$ ”, implica el axioma para \forall .

3) Probar que la regla de generalización para \forall es equivalente a la siguiente regla de generalización para \exists : si x no aparece libre en ϕ , de $\psi \rightarrow \phi$ deducimos $(\exists x\psi) \rightarrow \phi$.

4) Usamos $\phi \vdash \psi$ como abreviación de $\{\phi\} \vdash \psi$. Probar (sin usar completitud):

- a) $\phi \vdash \forall x\phi$.
- b) $\exists x\forall y\phi(x, y) \vdash \forall y\exists x\phi(x, y)$.
- c) $\vdash \exists x\forall y\phi(x, y) \rightarrow \forall y\exists x\phi(x, y)$.
- d) $\forall x\forall y\phi(x, y) \vdash \forall y\forall x\phi(x, y)$.
- e) Suponiendo que y no aparece ligada en ϕ , $\forall x\forall y\phi(x, y) \vdash \forall y\phi(y, y)$.