LÓGICA → de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ **Ejercicio hecho en clase** CURSO 2016/17

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

INSTRUCCION: Entregad UNICAMENTE esta hoja.

I) (10 puntos) Probar que no existe una enumeración algorímica de todas las funciones recursivas totales.

Demostración por contradicción: Sea $\{f_n\}_{n\geq 0}$ dicha enumeración algorítmica. Entonces $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definida mediante $g(n):=f_n(n)+1$ es una función recursiva total que no aparece en la lista.

II) a) (3 puntos) Enunciar el axioma de cuantificación sobre $\forall$.
b) (3 puntos) Enunciar la regla de generalización sobre $\forall$.
c) (4 puntos) Sea $\phi(x)$ una fbf en la que ninguna variable distinta de x aparece libre, y sea v una variable que no aparece en $\phi(x)$. Decidir razonadamente si $\vdash \forall x\phi(x) \to \forall v\phi(v)$.

a) Si t puede sustituir a x en φ, entonces $\forall x \varphi \to \varphi(t/x)$.

b) Si x no aparece libre en φ, de $\varphi \to \psi$ deducimos $\varphi \to \forall x \psi$.

c) Si. Como v no aparece en φ, puede sustituir a x en dicha fbf.

1) $\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(v/x)$ Axioma de cuantificación

2) $\forall x\, \varphi(x) \to \forall v\, \varphi(v)$ Regla de generalización: $\forall x \varphi(x)$ es una sentencia, no tiene variables libres

Comentario sobre a)
Escribir $\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(t/x)$ restringe indebidamente el axioma de cuantificación a fórmulas b.f.'s en las que, como mucho, hay una variable libre, la x.

III) (10 puntos) En una cinta infinita denotamos el número $n > 0$ escribiendo n "unos" consecutivos, mientras que el 0 lo denotamos escribiendo 0. Determinar de manera razonada qué función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcula la Máquina de Turing con alfabeto $\{B, 0, 1\}$, definida por

$$\{(q_0\ 0\ D\ q_0), (q_0\ B\ D\ q_1), (q_1\ B\ 0\ q_1), (q_0\ 1\ D\ q_2), (q_2\ 1\ D\ q_0), (q_2\ B\ D\ q_3), (q_3\ B\ 1\ q_3)\}.$$

$h = \mathbb{1}_A$, $A = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$ = conjunto de números impares.

Dem: Si el input es 0, el cabezal se mueve a la derecha, lee B, se mueve a la derecha, imprime 0, y se para.

Si el input es 2K "unos", K≥1, el cabezal se desplaza a la derecha, hasta que encuentra la primera B, lo que ocurre en el estado q_0. Como antes, el cabezal deja un espacio en blanco después del último 1, e imprime un 0 en ~~la~~ siguiente casilla.

Si el input es 2K+1 "unos", K≥0, la MT realiza las mismas operaciones que antes, hasta alcanzar la primera B, en estado q_2. Entonces se mueve a la derecha, y en estado q_3 lee B. La máquina escribe un 1 y se para.