II) (10 puntos) Demostrar que la noción de finitud no se puede expresar en un lenguaje de primer orden; es decir, demostrar que no existe una sentencia cuyos únicos modelos son precisamente los modelos finitos.

III) (10 puntos) Decidir razonadamente si la teoría $\underline{N}$ de la página 95 del libro (esencialmente, los axiomas de Peano menos Inducción) admite modelos no numerables.

SI. Por cada $x \in \mathbb{R}$, añadimos a $L(\underline{N})$ una nueva constante c_x, todas ellas distintas entre sí y de $\hat{0}$. Definimos $\Sigma = \underline{N} \cup \{c_x \neq c_y : x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y\}$. El modelo stándar $\mathcal{N}$ de $\underline{N}$ también lo es de cualquier subconjunto finito $S \subset \Sigma$: digamos que $c_{x_1} \neq c_{y_1}, \ldots, c_{x_K} \neq c_{y_K}$ son todas las premisas en $S \setminus \underline{N}$. Interpretamos c_{x_1} como 1, c_{y_1} como 2, …, c_{y_K} como $2K$, y todas las demás c_w, como 0.

Por compacidad Σ admite modelos, cuya cardinalidad es al menos la de $\mathbb{R}$.

Alternativamente, véase p. 96 (3) del libro.