Lógica | Ejercicio hecho en clase | Curso 2016/17

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

INSTRUCCION: Entregad UNICAMENTE esta hoja.

I) a) (2 puntos) Enunciar las dos versiones del Teorema de Completitud.
b) (8 puntos) Probar la validez de la lógica proposicional.

a) Completitud I: $\Sigma \vdash \phi \iff \Sigma \models \phi$.
Completitud II: $\Sigma \not\vdash \bot \iff \Sigma$ tiene un modelo

b) $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \Sigma \models \phi$.

Si Σ no tiene modelos $\Sigma \models \phi$ trivialmente.
En caso contrario, sea v un modelo de Σ.
Argumentamos por inducción en la longitud de la demostración $\phi_1, \ldots, \phi_n = \phi$.
$n=1$. $\phi \in \Sigma$ ó ϕ es un axioma, luego $v(\phi)=1$.
$n>1$. Suponemos que el resultado es cierto para toda $k \in [1,n)$. Si ϕ es un axioma, o una premisa, o $\phi = \phi_k$ para alguna $k<n$, entonces $v(\phi)=1$. En caso contrario, $\exists\, k,j<n$ t.q. ϕ se obtiene a partir de ϕ_k y ϕ_j mediante M.P., digamos, $\phi_k = \tau$, $\phi_j = \tau \to \phi$.
Por la H.I., $v(\tau) = 1 = v(\tau \to \phi) =$
$= v(\neg\tau \vee \phi) = v(\neg\tau) \vee v(\phi) = 0 \vee v(\phi)$,
luego $v(\phi)=1$.

ϕ ϕ

II) (10 puntos) Demostrar que si la teoría $\Sigma \nvdash \sigma$, entonces $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ es consistente. ~~Enunciar de forma completa todo teorema que se use en la demostración.~~

Demostramos la formulación equivalente "$\Sigma \cup \{\neg\phi\} \vdash \bot \Rightarrow \Sigma \vdash \phi$". Por el Teorema de la deducción, $\Sigma \vdash ((\neg\phi) \to \bot)$. Usando el axioma $(((\neg\phi)\to\bot)\to\phi)$ y M.P., obtenemos $\Sigma \vdash \phi$.

III) (10 puntos) Dadas las variables proposicionales p y q, hallar fórmulas bien formadas, tautológicamente equivalentes a $(\neg p)$ y a $(p \vee q)$, utilizando únicamente las conectivas en $\{\to, \bot\}$. Probar dicha equivalencia.

$(\neg p) \equiv (p \to \bot)$, y $(p \vee q) \equiv ((\neg p) \to q) \equiv ((p \to \bot) \to q)$.

Dem

p	q	$(\neg p)$	$(p \to \bot)$	$(p \vee q)$	$((p \to \bot) \to q)$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0