Para NO ENTREGAR.

Los problemas en esta hoja proporcionan una "construcción" moderadamente explicita (Zorn) de modelos no estándar de los naturales. Consideramos probabilidades P finitamente aditivas, que sólo toman los valores 0 y 1.

1) Sea P una probabilidad finitamente aditiva, definida en un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{N}$, con valores en $\{0, 1\}$. Los conjuntos con probabilidad 1 forman un *filtro*. Definir *filtro* sin utilizar probabilidades, y probar que las dos definiciones coinciden.

2) Probar que todo filtro de subconjuntos de un conjunto S, puede extenderse a un ultrafiltro (a un filtro maximal con respecto a la inclusión) en S. Sugerencia: Zorn.

3) Probar que si U es un ultrafiltro en S, para todo $A \subset S$, o $A \in U$ o $A^c \in U$.

4) Probar que si U es un ultrafiltro en S, y $A_1 \cup \cdots \cup A_n = S$, entonces existe una $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $A_j \in U$.

5) Sea $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ un producto cartesiano de conjuntos no vacios, y sea U un ultrafiltro en $\mathbb{N}$. Para $x, y \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, definimos $x \sim y$ si x e y son iguales casi seguro, es decir si $\{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\} \in U$. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Al conjunto $\mathcal{U} := \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n / \sim$ se le denomina *ultraproducto*.

6) Tomando $X_n = \mathbb{N}$ para todo n en la construcción anterior, probar que $\mathcal{U}$ es un modelo de los axiomas de Peano. Sugerencia: Buscar en la literatura el Teorema Fundamental de los Ultraproductos, de Łoś, e invocarlo.

7) Probar que si el ultrafiltro U contiene a todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ con complemento finito, entonces existe una $c \in \mathcal{U}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, c > n$. Sugerencia: tomar $c_n = n$.