

Para el Jueves 3/11/2016. Se pueden entregar ejercicios individualmente o en grupo. Hacerlo en grupo no penaliza.

Asumimos genérica e informalmente la no trivialidad. Al escribir fórmulas, se permiten las abreviaciones razonables.

1) Tomando  $\exists$  como abreviación de  $\neg\forall\neg$ , probar que el axioma de cuantificación para  $\forall$  implica la siguiente versión para  $\exists$ : si  $t$  puede sustituir a  $x$  en  $\phi$ , entonces  $\phi(t/x) \rightarrow \exists x\phi(x)$ . Del mismo modo, tomando  $\forall$  como abreviación de  $\neg\exists\neg$ , probar que el axioma de cuantificación para  $\exists$ , “si  $t$  puede sustituir a  $x$  en  $\phi$ , entonces  $\phi(t/x) \rightarrow \exists x\phi(x)$ ”, implica el axioma para  $\forall$ .

2) Probar que la regla de generalización para  $\forall$  es equivalente a la siguiente regla de generalización para  $\exists$ : si  $x$  no aparece libre en  $\phi$ , de  $\psi \rightarrow \phi$  deducimos  $(\exists x\psi) \rightarrow \phi$ .

3) Usamos  $\phi \models \psi$  como abreviación de  $\{\phi\} \models \psi$ . Probar o refutar:

- a)  $\exists x(\phi \vee \psi) \models (\exists x\phi) \vee (\exists x\psi)$ . Sugerencia: Probar.
- b)  $(\exists x\phi) \vee (\exists x\psi) \models \exists x(\phi \vee \psi)$ . Sugerencia: Probar.
- c)  $\exists x(\phi \wedge \psi) \models (\exists x\phi) \wedge (\exists x\psi)$ . Sugerencia: Probar.
- d)  $(\exists x\phi) \wedge (\exists x\psi) \models \exists x(\phi \wedge \psi)$ . Sugerencia: Refutar.
- e)  $\exists x(\phi \rightarrow \psi) \models (\exists x\phi) \rightarrow (\exists x\psi)$ . Sugerencia: Refutar.
- f)  $(\exists x\phi) \rightarrow (\exists x\psi) \models \exists x(\phi \rightarrow \psi)$ . Sugerencia: Probar.
- g)  $\exists x(\phi \rightarrow \psi) \models (\forall x\phi) \rightarrow (\exists x\psi)$ . Sugerencia: Probar.
- h)  $(\forall x\phi) \rightarrow (\exists x\psi) \models \exists x(\phi \rightarrow \psi)$ . Sugerencia: Probar.
- i)  $\phi \models \forall x\phi$ . Sugerencia: Probar.
- j)  $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \models (\forall x\phi) \rightarrow (\forall x\psi)$ . Sugerencia: Probar.
- k)  $(\forall x\phi) \rightarrow (\forall x\psi) \models \forall x(\phi \rightarrow \psi)$ . Sugerencia: Refutar.
- l)  $(\exists x\phi) \rightarrow (\forall x\psi) \models \forall x(\phi \rightarrow \psi)$ . Sugerencia: Probar.
- m)  $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \models (\exists x\phi) \rightarrow (\exists x\psi)$ . Sugerencia: Probar.

4) Usamos  $\phi \vdash \psi$  como abreviación de  $\{\phi\} \vdash \psi$ . Probar (sin usar completitud):

- a)  $\phi \vdash \forall x\phi$ .
- b)  $\exists x\forall y\phi(x, y) \vdash \forall y\exists x\phi(x, y)$ .
- c)  $\vdash \exists x\forall y\phi(x, y) \rightarrow \forall y\exists x\phi(x, y)$ .
- d)  $\forall x\forall y\phi(x, y) \vdash \forall y\forall x\phi(x, y)$ .
- e) Suponiendo que  $y$  no aparece ligada en  $\phi$ ,  $\forall x\forall y\phi(x, y) \vdash \forall y\phi(y, y)$ .