I) Definir "teoría completa". Enunciar el lema de Zorn. Enunciar y probar el Teorema de Lindenbaum para la lógica proposicional.

Algo que no estaba claramente expresado en muchas demostraciones es porqué la teoría maximal M dada por Zorn es completa: para toda FBF p, si $M \nvdash p$, $M \cup \{\neg p\}$ es una extensión consistente de M. Pero como M es maximal por inclusión, $M \cup \{\neg p\} = M$, luego $M \vdash \neg p$.

II) Enunciar y probar el teorema sobre el problema de la detención de las Máquinas de Turing.

Comentario: trabajamos con MT's cuyos inputs son numeros naturales. La inexistente MT que nos dice para todas las MT's y todo $n \in \mathbb{N}$ si $MT(n)$ para o no, actua sobre pares de naturales, $g(MT)$ y n. Esto no es esencial, porque el par $(g(MT), n)$ puede codificarse como un único natural (usando, p. ej. la función $\alpha_2(m,n)$). Llamemos D a esta MT inexistente y V a la MT que diagonaliza a D. V tiene inputs $\in \mathbb{N}$, y la contradicción se obtiene al considerar $V(g(V))$.

III) (10 puntos) Usamos $\phi \models \psi$ como abreviación de $\{\phi\} \models \psi$. Si no se indica otra cosa, las teorías son L-teorías en alguún lenguaje L de primer orden. Elegir la respuesta correcta a las siguientes preguntas:

2) Las fórmulas bien formadas $(q \to (p \to q))$ y $((q \to p) \to p)$ son equivalentes. V F

La 1ª es una tautología. La segunda, no.

3) Si $\Sigma \vdash ((\phi_1 \to \phi_2) \to (\phi_1 \wedge (\neg\phi_2)))$, entonces $\Sigma \vdash ((\phi_1 \to \phi_2) \to \phi_1)$. V F

Si $\phi_1 \wedge \neg \phi_2$ es verdad, entonces ϕ_1 es verdad.

4) Si $A \subset \mathbb{N}$ es recursivamente enumerable, entonces también lo es A^c. V F

B es recursivo $\Leftrightarrow$ B y B^c son recursivamente enumerables

Escogemos A recursivamente enumerable pero no recursivo

5) Si $\Sigma \vdash \forall x\psi$, entonces $\Sigma \vdash \psi$. V F

Por el axioma de cuantificación: x puede sustituir a x en ψ.

6) $\exists x(\phi \to \psi) \models (\forall x\phi) \to (\exists x\psi)$. V F Informalmente, si $\forall x\, \phi$ es verdad, $\forall a \in A$, $\phi(a)$ es verdad. Por hipótesis $\exists x(\phi \to \psi)$, como $\phi(a)$ es verdad siempre, $\exists b \in A$ t.q. $\psi(b)$ es verdad.

7) Existen modelos numerables de los números reales. V F Si L es numerable, por Lowenheim-Skolem, la teoría de $\mathbb{R}$ en dicho lenguaje tiene modelos numerables.

8) Sea L un lenguaje numerable de primer orden y sea Σ una L-teoría consistente. Si todos sus modelos numerables son isomorfos, entonces Σ es completa. V F Test de Vaugh.

9) Dados los axiomas de la lógica proposicional, existe un algoritmo que nos permite decidir si una fórmula bien formada ψ es un teorema o no. V F Los teoremas son las tautologías. Escribir la tabla de verdad.

10) Dados los axiomas de la lógica de primer orden, existe un algoritmo que nos permite decidir si una fórmula bien formada ψ es un teorema o no. V F $\{N1, \ldots, N9\} \vdash \sigma$ $\Leftrightarrow \vdash (N1 \wedge \ldots \wedge N9) \to \sigma$. Pero el conjunto de teoremas de $\{N_1, \ldots, N9\}$ no es recursivo.

11) Sea Σ una teoría finita y completa; entonces existe un algoritmo que nos permite decidir si una fórmula bien formada ψ es un teorema o no. V F Generamos sistemáticamente todas las consecuencias de Σ. Dada $\varphi \in FBF(L)$, como Σ es completa, ó φ aparece, ó $\neg\varphi$ aparece, despues de un número finito de pasos.

IV) (10 puntos) Sea L un lenguaje de primer orden, y sea Σ una L-teoría que admite modelos de cardinalidad p por cada primo p. Decidir razonadamente si Σ tiene modelos de cardinalidad infinita.

Sea $\Sigma' := \Sigma \cup \{\sigma_n : n \geq 2\}$, donde σ_n nos dice que por lo menos hay n elementos:

$$\sigma_n = \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n \Big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \neq x_j) \Big).$$

Todo subconjunto finito S de Σ' tiene un modelo: si $S \subset \Sigma$ cualquier modelo de Σ sirve. Si S contiene alguna σ_n, escogemos la σ_N con subíndice más alto en S. Entonces cualquier modelo de Σ con cardinalidad $p > N$ es un modelo de S. Por compacidad, Σ' tiene un modelo, de cardinalidad necesariamente infinita. Pero dicho modelo también lo es de Σ.

V) a) (2 puntos) Enunciar la regla de generalización para $\forall$.
b) (3 puntos) Decidir razonadamente si $(p \to (q \to p))$ y $((p \to (\neg p)) \to p)$ son tautologías.
c) (2 puntos) Decidir razonadamente si $\psi \vdash (\neg \forall x \psi) \to \psi$. OJO: ψ podría tener variables libres.
d) (3 puntos) Decidir razonadamente si $\psi \vdash \forall x \psi$.

b) la 1ª sí, la segunda no (tablas).

c) 1) φ (premisa)

2) $\varphi \to ((\neg \forall x \varphi) \to \varphi)$ tautología en b).

3) $(\neg \forall x \varphi) \to \varphi$, 1, 2, M.P.

Comentario: el lema de la deducción requiere que $\neg \forall x \varphi$ sea una sentencia, cosa que no se nos dice.

d) 4) $(\neg \forall x \varphi) \to \forall x \varphi$ (generalización de 3: x no aparece libre en $\neg \forall x \varphi$)

5) $((\neg \forall x \varphi) \to \forall x \varphi) \to \forall x \varphi$ (tautología)

6) $\forall x \varphi$ MP, 4 y 5).

VI) (10 puntos) Dada la Máquina de Turing con alfabeto $\{B, 1, 2\}$, definida por $\{(q_0\ 1\ 2\ q_0), (q_0\ 2\ D\ q_0),$ ~~$(q_0\ B$~~ $(q_0\ B\ D\ q_1)\}$

determinar su output cuando el input es $1\ 1\ B\ B\ 1\ B\ 2\ B$ (el resto de la cinta son $B's$). Describir en general que hace esta Máquina de Turing, indicando si se detiene el algún momento o no.

Output: 2 2 B B 1 B 2 B

q_1

En general, si toda la cinta está en blanco y el cabezal se encuentra sobre cualquier casilla, se desplaza a la derecha y para. Si la cinta no está en blanco, el cabezal está sobre el primer símbolo de la primera palabra (concatenación de unos y doses sin espacios en blanco entremedios). En dicha palabra la MT cambia todos los 1's (si los hubiera) a 2's, deja los 2's igual, al alcanzar la primera B se desplaza a la derecha y termina (en todos los pasos, o se desplaza a la derecha o cambia 1 a 2).