

Para el Lunes 2/11/2015. Se pueden entregar ejercicios individualmente o en grupo. Hacerlo en grupo no penaliza.

Asumimos genérica e informalmente la no trivialidad. Al escribir fórmulas, se permiten las abreviaciones razonables.

1) Leer los ejemplos 1-6 p.24 y los ejemplos 1-10 pp. 35-36 del libro. Sea σ una sentencia en el lenguaje de los anillos (Ejemplo 6 p.24), verdadera en todos los cuerpos de característica 0. Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: existe una N tal que para todo primo $p > N$, σ es verdad en todos los cuerpos de característica p .

2) Dar un ejemplo no trivial de teoría completa. Sugerencia: buscarlo en el libro.

3) Sea L el siguiente lenguaje de primer orden con igualdad: las constantes de L son $\{\underline{n} : n \in \mathbb{N}\}$, la única función unaria, S_1 , las funciones binarias, $+_1$ y \cdot_1 , y la relación binaria $<_1$ (los subrayados y subíndices están para distinguir los símbolos de sus interpretaciones habituales). A efectos de este problema consideramos como versión oficial de los axiomas de Peano los N1-N9 p. 91 del libro, junto con el esquema de axiomas de la p. 102 (inducción), expresados en el lenguaje L de la forma obvia.

a) Sea Σ_1 la teoría, en el lenguaje L , que se obtiene al añadir a los axiomas de Peano la colección $\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde ψ_n es la fbf $\exists x(\underline{n} <_1 x)$. Decidir razonadamente si Σ_1 es consistente. De modo más específico, decidir razonadamente si Σ_1 tiene un modelo. Aún más específicamente, decidir si los números naturales de toda la vida, en cuya existencia todos creemos, son un modelo de Σ_1 . De existir algún modelo, decidir razonadamente si es único. Sugerencia: recordar el primer Teorema de Incompletitud de Gödel, o el segundo.

b) Sea L_c el lenguaje de primer orden que se obtiene al añadir a L una nueva constante c , y sea Σ_2 la teoría, en el lenguaje L_c , que se obtiene al añadir a los axiomas de Peano la colección $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde ϕ_n es la fbf $\underline{n} <_1 c$. Decidir razonadamente si Σ_2 es consistente. De modo más específico, decidir razonadamente si Σ_2 tiene un modelo. Decidir si los números naturales de toda la vida, en cuya existencia todos creemos, son un modelo de Σ_2 . De existir algún modelo, decidir razonadamente si es único. Sugerencia: recordar el primer Teorema de Incompletitud de Gödel, o el segundo.