Para el Lunes 15/11/2015. Se pueden entregar ejercicios individualmente o en grupo. Hacerlo en grupo no penaliza.

Asumimos genérica e informalmente la no trivialidad. Al escribir fórmulas, se permiten las abreviaciones razonables.

1) Tomando $\exists$ como abreviación de $\neg\forall\neg$, probar que el axioma de cuantificación para $\forall$ implica la siguiente vesión para $\exists$: si t puede sustituir a x en ϕ, entonces $\phi(t|x) \to \exists x\phi(x)$. Del mismo modo, tomando $\forall$ como abreviación de $\neg\exists\neg$, probar que el axioma de cuantificación para $\exists$, "si t puede sustituir a x en ϕ, entonces $\phi(t|x) \to \exists x\phi(x)$", implica el axioma para $\forall$.

2) Probar que la regla de generalización para $\forall$ es equivalente a la siguiente regla de generalización para $\exists$: si x no aparece libre en ϕ, de $\psi \to \phi$ deducimos $(\exists x\psi) \to \phi$.

3) Usamos $\phi \models \psi$ como abreviación de $\{\phi\} \models \psi$. Probar o refutar:
a) $\exists x(\phi \vee \psi) \models (\exists x\phi) \vee (\exists x\psi)$.
b) $(\exists x\phi) \vee (\exists x\psi) \models \exists x(\phi \vee \psi)$.
c) $\exists x(\phi \wedge \psi) \models (\exists x\phi) \wedge (\exists x\psi)$.
d) $(\exists x\phi) \wedge (\exists x\psi) \models \exists x(\phi \wedge \psi)$.
e) $\exists x(\phi \to \psi) \models (\exists x\phi) \to (\exists x\psi)$.
f) $(\exists x\phi) \to (\exists x\psi) \models \exists x(\phi \to \psi)$.
g) $\exists x(\phi \to \psi) \models (\forall x\phi) \to (\exists x\psi)$.
h) $(\forall x\phi) \to (\exists x\psi) \models \exists x(\phi \to \psi)$.
i) $\phi \models \forall x\phi$.
j) $\forall x(\phi \to \psi) \models (\forall x\phi) \to (\forall x\psi)$.
k) $(\forall x\phi) \to (\forall x\psi) \models \forall x(\phi \to \psi)$.
l) $\exists x(\phi \to \psi) \models (\forall x\phi) \to (\exists x\psi)$.
m) $(\exists x\phi) \to (\forall x\psi) \models \forall x(\phi \to \psi)$.
n) $\forall x(\phi \to \psi) \models (\exists x\phi) \to (\exists x\psi)$.

4) Usamos $\phi \vdash \psi$ como abreviación de $\{\phi\} \vdash \psi$. Probar (sin usar completitud):
a) $\phi \vdash \forall x\phi$.
b) $\exists x\forall y\phi(x,y) \vdash \forall y\exists x\phi(x,y)$.
c) $\vdash \exists x\forall y\phi(x,y) \to \forall y\exists x\phi(x,y)$.
d) $\forall x\forall y\phi(x,y) \vdash \forall y\forall x\phi(x,y)$.
e) $\forall x\forall y\phi(x,y) \vdash \forall y\phi(y,y)$.