ÁLGEBRA I. HOJA 7

1) Sea S una forma trilineal alternada distinta de 0, y sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{K}^3$. Dados $u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3$, $u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3$, y $u_3 = a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3$, escribir $S(u_1, u_2, u_3) = c\, S(v_1, v_2, v_3)$, hallando c de forma explícita.

2) Escribir la matriz de un giro (rotación):

a) de noventa grados en sentido positivo (contrario al de las agujas del reloj), alrededor del origen en $\mathbb{R}^2$.

b) de ángulo α en sentido negativo alrededor del origen en $\mathbb{R}^2$.

3) Escribir la matriz de la simetría (reflexión) de $\mathbb{R}^3$ respecto a:

a) El plano de ecuación y = x.

b) El plano de ecuación y = z .

c) El plano de ecuación x = z .

d) La recta de ecuaciones y = x, z = 0.

e) La recta de ecuaciones y = z , x = 0.

f) La recta de ecuaciones x = z , y = 0.

Determinar los correspondientes núcleos e imágenes.

4) Hallar la matriz en las bases canónicas de la aplicación T del espacio de los polinomios de grado ≤ 3 en $\mathbb{R}^4$ dada por $T(p(x)) = (p(-1), p(1), p(-2), p(2))$.

Observación: En esta hoja de ejercicios, cuando nos referimos a vectores columna en $\mathbb{R}^n$, omitimos el símbolo de transposición. Estrictamente hablando, aquí se trata del vector $(p(-1), p(1), p(-2), p(2))^T$.

5) Hallar las matrices en las bases canónicas de las siguientes aplicaciones:

a) La aplicación A de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dada por $A(x, y, z) = (x - y + 2z, x + y, 2x + 2y + z)$.

b) La aplicación B de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^2$ dada por $B(z_1, z_2) = (iz_1 + 2z_2, z_1 - iz_2)$.

c) La aplicación C de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dada por $C(x, y, z) = (x + z, y, x + y + z)$.

d) La aplicación D de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^3$ dada por $D(z_1, z_2) = (iz_1 + z_2, z_1 + iz_2, z_1 - iz_2)$.

e) La aplicación E de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$ dada por $E(x, y) = (x, x + y, 2x, x + 2y)$.

6) Dada la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$ por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en las bases canónicas, hallar la matriz de dicha aplicación en las bases $\{(0, 1), (1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)(0, 0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

7) Sea T la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$ definida mediante multiplicación por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en las bases $\{(0,1),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)(0,0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$. Hallar la matriz de T con respecto a las bases canónicas.

8) Hallar la expresión matricial, con respecto a la base canónica, de la aplicación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(1,1,0)=(1,1,1), \quad T(1,0,-1)=(0,1,1) \text{ y } \quad T(1,-1,1)=(1,2,2).$$

9) Dada la aplicación lineal $T:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ en las bases canónicas por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **a)** Hallar una base del núcleo de T.
- **b)** Hallar unas ecuaciones cartesianas del núcleo de T.
- **c)** Hallar una base de la imagen de T.
- **d)** Hallar unas ecuaciones cartesianas de la imagen de T.

10) Hallar para qué valores de a, el conjunto $\{(a,0,1),(0,1,1),(2,-1,a)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

11) Comprobar que una base de $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ está formada por $\{1\}$, pero una base de $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es $\{1,i\}$. Estos dos espacios vectoriales tienen distinta dimensión.