ÁLGEBRA I. HOJA 6

Problemas de libro Linear Algebra Done Wrong (LADW) de Treil:

- pp. 66-68 7.1-7.14;
- pp. 72-73 8.1-8.6.

En esta Hoja todos los espacios vectoriales son reales.

1. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, los vectores fila determinan un paralelogramo, y los vectores columna otro. Calcular sus áreas. Meditar sobre el resultado. Puede usarse sin remordimientos que el área de un paralelogramo es igual a la longitud de su base por la altura.

2. Una forma (función o aplicación) $S(\cdot, \cdot)$ es bilineal si es lineal en la primera entrada y en la segunda entrada. Por ejemplo, el producto escalar habitual en $\mathbb{R}^d$ es una forma bilineal. Sabiendo que las formas bilineales $S : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ forman un e.v. V (con la multiplicación por escalares y la suma suma de formas definidas de la manera natural) calcular su dimensión. La manera natural es $(S_1 + S_2)(u, v) := S_1(u, v) + S_2(u, v)$, y $(\alpha S)(u, v) := \alpha(S(u, v))$.

Dada cualquier forma bilineal $S : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$, representarla matricialmente; es decir, hallar una matriz A 2×2 tal que $S(u, v) = u^T Av$.

Sugerencia: basta probar que si $\{v_1, v_2\}$ es cualquier base de $\mathbb{K}^2$, los cuatro valores $S(v_i, v_j)$, $1 \leq i, j \leq 2$, determinan S.

3. Probar que las formas bilineales simétricas ($S(u, v) = S(v, u)$) forman un subespacio W de V. Calcular su dimensión. Dada cualquier forma bilineal simétrica S, hallar una matriz A 2×2 tal que $S(u, v) = u^T Av$.

4. Probar que las formas bilineales alternadas ($S(u, v) = -S(v, u)$) forman un subespacio Alt de V. Calcular su dimensión. Sea S distinta de 0, y sea $B = \{v_1, v_2\}$ una base de $\mathbb{K}^2$. Dados $u = a_1 v_1 + a_2 v_2$ y $v = b_1 v_1 + b_2 v_2$, expresar $S(u, v)$ como $cS(v_1, v_2)$. Al escalar c se le denomina determinante de la matriz $([u]_B\ [v]_B) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$. Observación: el determinante depende de la base $\{v_1, v_2\}$, pero no de la forma S (siempre que no sea la forma 0).

5. Encontrar bases de los siguientes subespacios:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 & +x_3 + & 2x_4 & = 0 \\ x_1 & -x_3 & & = 0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^5 \qquad \left.\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^5$$

6. Encontrar una base del subespacio $S \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definido por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} 2a + b - c + d = 0 \\ a + b + c - d = 0 \end{array} \right\}$$

7. Encontrar una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que tres divisibles por $x-1$.

8. Comprobar que el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1,0,1,-1)^T,(1,-1,1,-1)^T\}$ coincide con el espacio de soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 & +x_3 & +2x_4 & =0 \\ x_1 & -x_3 & & =0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

9. Hallar las ecuaciones cartesianas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \mathrm{Span}\{(1,0,1,0)^T,(2,1,0,-1)^T,(1,-1,3,1)^T\}, \\ S_2 &= \mathrm{Span}\{(3,1,0,-1)^T,(1,1,-1,-1)^T,(7,1,2,-1)^T\}, \\ S_3 &= \mathrm{Span}\{(0,2,5,0)^T\}. \end{aligned}$$

10. Sean

$$\begin{aligned} S_1 &= \mathrm{Span}\{(1,0,1,0,1)^T,(2,1,0,-1,0)^T,(2,0,1,0,1)^T\}, \\ S_2 &= \mathrm{Span}\{(3,1,0,-1,0)^T,(1,1,-1,-1,-1)\}^T. \end{aligned}$$

Comprobar que $S_1+S_2=S_1$ y $S_1\cap S_2=S_2$.

11. Siendo $S_1=\mathrm{Span}\{(0,1,1,0)^T,(1,0,0,1)^T\}$ y

$$S_2 \equiv \left\{\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & +x_2 & & & =0 \end{array}\right.$$

hallar una base y las ecuaciones cartesianas de S_1+S_2 y $S_1\cap S_2$.

12. Comprobar que son complementarios los subespacios definidos por las ecuaciones:

$$S_1 \equiv \left\{\begin{array}{lllll} -2x_1 & -5x_2 & +4x_3 & & =0 \\ -2x_1 & +7x_2 & & +4x_4 & =0 \end{array}\right. \qquad S_2 \equiv \left\{\begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & & +x_4 & =0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & & =0 \end{array}\right.$$

13. Hallar una base y las ecuaciones cartesianas de un espacio complementario de

a) $S_1=\mathrm{Span}\{(0,2,5,0)^T,(-1,1,3,2)^T\}$.

b) $S_2=\mathrm{Span}\{(1,1,0,0)^T,(1,0,1,0)^T,(0,0,1,1)^T,(0,1,0,1)^T\}$.

14. Hallar una base de $S_1\cap S_2$ y de S_1+S_2, donde

$$S_1=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right\}, \qquad S_2=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Hallar también las ecuaciones cartesianas de $S_1\cap S_2$ y de S_1+S_2.

15. Consideramos los subespacios del espacio de polinomios de grado ≤ 3 S_1, formado por los polinomios múltiplos de $x+1$, y S_2, formado por los polinomios múltiplos de $x-1$. Hallar los subespacios suma e intersección de S_1 y S_2.

16. En $\mathbb{R}^4$ sean $U = \text{Span}\{u_1, u_2\}$ y $V = \text{Span}\{v_1, v_2\}$ donde

$$u_1 = (1, 1, 2, -\lambda)^T, \quad u_2 = (-1, 1, 0, -\lambda)^T, \quad v_1 = (1, \lambda, 2, -\lambda)^T, \quad v_2 = (2, 3, \lambda, 1)^T.$$

Hallar según los valores de λ las dimensiones de U , V, $U + V$ y $U \cap V$.