ALGEBRA I. HOJA 4

Problemas de LADW pp. 29-30, 6.1-6.13.

1) Sea $M_{m,n}(\mathbb{R})$ el espacio de matrices $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$, y sea $tr(A)$ la traza de la matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, definida mediante $tr(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Sea e_{ij} la matriz con un 1 en la entrada (i, j) y 0 en todas las demás (usamos la misma notación e_{ij} para matrices de todos los tamaños). Calcular $tr(Ae_{ij})$ y $tr(e_{ij}A)$, donde A es $m \times n$ y e_{ij} es $n \times m$.

2) Probar si A es $m \times n$ y B es $n \times m$, entonces $tr(AB) = tr(BA)$.

3) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación por el ángulo α, y sea $B = \{v_1 = (2, 0), v_2 = (0, 1)\}$. Hallar $[T]_{BB}$ (nótese que v_1 y v_2 son perpendiculares pero no tienen la misma longitud).

4) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal defninida mediante multiplicación por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 9/10 & 2/10 \\ 1/10 & 8/10 \end{pmatrix},$$

donde todas las coordenadas están expresadas utilizando la base canónica $B_c = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$.
a) Calcular los autovalores de A.

b) Calcular Av_1 y Av_2, donde $v_1 = (2, 1), v_2 = (1, -1)$.

Hallar la matriz que representa a la Identidad $Id(v) = v$, $Id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuando

c) la base en el espacio de partida es la canónica, y en el espacio de llegada es $B' = \{v_1 = (2, 1), v_2 = (1, -1)\}$;

d) la base en el espacio de partida es B', y en el de llegada es B_c.

e) Hallar la matriz $D = [T]_{B'B'}$ que representa a T con respecto a B'. Observese que D es la matriz diagonal formada con los autovalores de A.

f) Hallar $\lim_{n\to\infty} A^n$. Sugerencia: usar $[T]_{B_cB_c} = A = [I]_{B_cB'}[T]_{B'B'}[I]_{B'B_c}$ para probar que

$$\lim_{n\to\infty} A^n = [I]_{B_cB'} \left(\lim_{n\to\infty} D^n\right) [I]_{B'B_c}.$$

Comentario: Al proceso de hallar bases como B' (cuando existan) de modo que $A = [I]_{B_cB'}D[I]_{B'B_c}$, donde D es diagonal, se denomina diagonalizar A.

5) ¿ Es cierto que $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$?

6) Hallar las matrices 2×2 reales tales que su cuadrado es $-I$.

7) Explicar qué transformaciones tienen lugar en la matriz C cuando calculamos CD y DC, donde

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

¿ Cuáles son las matrices diagonales que conmutan con todas las demás?

8) Demostrar que una matriz cuadrada que no es diagonal no conmuta con todas las demás. Deducir de este ejercicio y del anterior la forma de las matrices que conmutan con todas las demás.

9) Se llaman matrices elementales a las obtenidas de la matriz identidad, haciendo alguna de las siguientes transformaciones:

a) Permutación de dos filas.

b) Suma de una fila por otra (distinta), multiplicada por un número.

c) Multiplicación de una fila por un número distinto de cero.

Escribir todas las matrices elementales 3×3.
Escoger una matriz cualquiera de números y comprobar que al multiplicar esta matriz por otra elemental por la izquierda, se realiza en la matriz escogida, la transformación que había tenido lugar para obtener la matriz elemental. Generalizar el resultado.

10) Una matriz *simétrica* (respectivamente, *antisimétrica*) es aquella que cumple $A = A^T$ (respectivamente, $A = -A^T$).
Probar que una matriz antisimétrica tiene nulos todos los elementos en la diagonal principal.

11) Una matriz que es simétrica y antisimétrica ha de ser la matriz nula (todos sus elementos son 0).

12) Probar que:

1. Dada una matriz cuadrada A, la matriz $1/2(A + A^T)$ es simétrica.
2. Dada una matriz cuadrada A, la matriz $1/2(A - A^T)$ es antisimétrica.
3. Toda matriz cuadrada se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

13) Entre las matrices cuadradas complejas se definen las matrices *hermíticas* como aquellas que verifican $a_{ij} = \overline{a_{ji}} \forall ij$ (o bien, $A = \overline{A^T}$). Respectivamente, las *antihermíticas* como aquellas que verifican $A = -\overline{A^T}$.
Probar que:

1. Una matriz hermítica tiene todos los elementos de la diagonal principal reales.
2. Una matriz antihermítica tiene todos los elementos de la diagonal principal imaginarios puros.
3. Una matriz a la vez hermítica y antihermítica ha de ser la matriz nula.
4. Toda matriz cuadrada compleja se puede escribir como suma de una matriz hermítica y otra antihermítica.

14) Comprobar que el producto de matrices simétricas no es necesariamente una matriz simétrica, realizando el producto AB en el caso a):

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Sin embargo, sí es simétrico en el caso:

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Comprobar que en el caso a), $AB = (BA)^T$, mientras que en el caso b), $AB = BA$ (esto es, A y B *conmutan*).

15) Demostrar que dadas dos matrices simétricas A y B, conmutan si y sólo si su producto es una matriz simétrica.

16) Probar que si A es simétrica y B antisimétrica, A y B conmutan si y sólo si su producto es una matriz antisimétrica.

17) Demostrar que toda matriz simétrica real o compleja 2×2 que conmute con

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es un múltiplo de la identidad.