ÁLGEBRA I. HOJA 3

Problemas de LADW p. 23, 5.1-5.8.

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

comprobar que no existe una matriz B tal que $AB = I = BA$.

2. Siendo A y B las matrices dadas a continuación, calcular los productos AB y BA cuando sea posible y comparar los resultados.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 50 \\ 1 & 60 \\ 1 & 86 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

3. ¿Es cierta para matrices cuadradas la relación $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Probar la relación, o suministrar un contraejemplo. Determinar que sucede en el caso especial de las matrices 2×2 de la forma $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$. ¿Es el producto de tales matrices conmutativo? Si son distintas de la matriz 0 ¿tienen siempre un inverso multiplicativo?

4. Comprobar que el producto de dos matrices puede ser nulo sin que lo sean ninguno de los factores, hallando AB, donde A y B son las matrices dadas a continuación:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Siendo A, B y C las matrices dadas a continuación, calcular $(AB)C$ y $A(BC)$. En general, ¿es el producto de matrices 2×2 asociativo?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. ¿Es el producto de matrices asociativo? No suponemos que las matrices son cuadradas, pero si que los productos están bien definidos. Por ejemplo, si A es 2×1, B es 1×2 y C es 2×2, ¿se cumple siempre que $(AB)C = A(BC)$?

7. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 9/10 & 2/10 \\ 1/10 & 8/10 \end{pmatrix},$$

calcular A^2, A^4, y A^8. Una pregunta para meditar sobre ella: ¿existe $\lim_{n\to\infty} A^n$?.

Los siguientes problemas sirven de repaso para las nociones de espacio vectorial e independencia lineal.

8. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, y sea $C^\infty_\mathbb{R}(I)$ el conjunto de funciones $f : I \to \mathbb{R}$ derivables n veces para todo $n > 0$. Demuestra que $C^\infty_\mathbb{R}(I)$, con $\mathbb{R}$ como cuerpo de escalares, es un espacio vectorial.

1. Consideramos el conjunto

$$V = \{v \in C^\infty_\mathbb{R}((-1,1)) : v'(t) = -0{,}5\, v(t) \quad \forall t \in (-1,1)\},$$

que modeliza la velocidad de un autobús tras accionar su freno eléctrico. Demuestra que V es un subespacio vectorial de $C^\infty_\mathbb{R}(-1,1)$ y que $v(t) = e^{-0{,}5t}$ está en V.

2. Consideramos el conjunto

$$W = \{x \in C^\infty_\mathbb{R}((-1,1)) : x''(t) = -0{,}25x(t) \quad \forall t \in (-1,1)\}$$

que modeliza la posición de una masa en el extremo de un muelle. Demuestra que W es un subespacio vectorial de $C^\infty_\mathbb{R}(-1,1)$ y que las funciones $\cos(0{,}5t)$ y $\operatorname{sen}(0{,}5t)$ están en W.

9. Considera los espacios vectoriales V y W del problema anterior.

1. Halla un vector $v(t) \in V$ que satisfaga $v(0{,}3) = 1$.
2. Halla un vector $x(t) \in W$ que satisfaga $x(0) = 2$ y $x'(\pi/4) = 0{,}2$.
3. ¿Son independientes los vectores $e^{-0{,}5t}$ y $e^{-0{,}5(t-1/3)}$ de V?
4. ¿Son independientes los vectores $\cos(0{,}5t)$, $\cos(0{,}5t + 0{,}5)$ y $\cos(0{,}5t + 1)$ de W?

10. Sea $V = \{v \in \mathbb{R} : -1 < v < 1\}$, es decir, el intervalo de número reales $(-1,1)$. Definiendo las operaciones suma $\dagger$ y producto por escalares $*$ según las fórmulas

$$u \dagger v = \frac{u+v}{1+uv} \qquad \forall u, v \in V$$

$$a * u = \frac{(1+u)^a - (1-u)^a}{(1+u)^a + (1-u)^a} \qquad \forall a \in \mathbb{R}, u \in V,$$

se puede demostrar que V es un espacio vectorial. Físicamente, $\dagger$ representa la suma de velocidades relativista en dimensión uno tomando como unidades que la velocidad de la luz sea 1.

1. Demuestra la propiedad asociativa, es decir $(u \dagger v) \dagger w = u \dagger (v \dagger w)$ para todo $u, v, w \in V$.
2. Demuestra que $2 * u = u \dagger u$ para todo $u \in V$, un caso particular de la propiedad distributiva.