ÁLGEBRA I. HOJA 2

1. Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales ó bien el cuerpo de los números complejos (es decir, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Dado un $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{P}_n^{\mathbb{K}}$ el conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Decidir razonadamente si los siguientes conjuntos, con la adición y multiplicación por escalares en $\mathbb{K}$ definidas de manera natural, forman espacios vectoriales:

1. $\mathcal{P}_n^{\mathbb{K}}$.
2. el conjunto de polinomios en $\mathcal{P}_n^{\mathbb{K}}$ de grado *igual* a n.
3. $\{f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que f es continua$\}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
4. $\{f\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$ tal que f es continua$\}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), donde $\mathbb{R}_+$ denota los números positivos.

2. Sea $\mathcal{P}^{\mathbb{R}}$ el espacio de todos los polinomios sobre $\mathbb{R}$. Comprobar que con la suma y el producto por escalares definidos de la manera natural, $\mathcal{P}^{\mathbb{R}}$ es un espacio vectorial. Hallar una base para $\mathcal{P}^{\mathbb{R}}$.

3. ¿Cuáles de las siguientes familias de vectores forman un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$?

1. $\{(1,2,3)^T, (1,2,5)^T\}$,
2. $\{(1,2,3)^T, (1,2,5)^T, (0,0,-4)^T\}$,
3. $\{(1,2,3)^T, (1,2,5)^T, (0,0,-4)^T, (1,1,1)^T\}$.

4. ¿ Cuáles de las 3 familias de vectores que aparecen en el ejercicio anterior son linealmente independientes?

5. ¿ Cuáles de las 3 familias de vectores que aparecen en el ejercicio anterior forman una base de $\mathbb{R}^3$?

6. Determinar si la familia de vectores $\{(1, 1+2i)^T, (i, -2+i)^T\}$ es una base del espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$.

7. Un subespacio S es un subconjunto de un espacio vectorial V que por sí mismo también es un espacio vectorial. Para comprobar que S es un subespacio, basta ver que está cerrado bajo la suma de vectores y el producto de vectores por escalares; no es necesario verificar que las operaciones satisfacen los axiomas de un e. v., porque éstos se cumplen en todo V, y por tanto en $S \subset V$. Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

1. $A = \{(3x_2, x_2, x_4 + x_2, x_4)^T \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$.
2. $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}$.
3. $C = \{(x_1, x_2, x_1, x_2)^T \mid x_1 = 1\}$.
4. $D = \{(x_1, x_1, x_1, x_1)^T \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$.
5. $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1 = t, x_2 = t, x_3 = 2t, x_4 = 5t, t \in \mathbb{R}\}$.

8. Comprobar si son o no espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ los siguientes conjuntos, con las operaciones indicadas:

1. $V = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2\}, \quad (x_1, x_2)^T + (y_1, y_2)^T = (x_1 + y_1, 0),\ \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$.

2. $V=\{(x_1,x_2)^T\in\mathbb{R}^2 \mid x_1\neq 0, x_2\neq 0\}$, $\quad (x_1,x_2)^T+(y_1,y_2)^T=(x_1y_1,x_2y_2)^T$, $\lambda(x_1,x_2)^T=(\lambda x_1,\lambda x_2)^T$.

9. Se considera el espacio vectorial real $\mathcal{P}_3^{\mathbb{R}}$.

1. ¿Es $W_1=\{p(x)\in\mathcal{P}_3^{\mathbb{R}}\colon (x-1)$ divide a $p(x)\}$ un subespacio de $\mathcal{P}_3^{\mathbb{R}}$?
2. ¿Es $W_2=\{p(x)\in\mathcal{P}_3^{\mathbb{R}}\colon p(2)=0\}$ un subespacio de $\mathcal{P}_3^{\mathbb{R}}$?
3. Escribir, si es posible, los polinomios $1,x,x^2,x^3$ como combinación lineal del sistema de vectores formado por $p(x)=1+x+x^2+x^3$ y sus tres primeras derivadas $p'(x),p''(x)$ y $p'''(x)$.

10. Se consideran los subconjuntos V y W de $\mathbb{C}^4$ donde

$$V=\left\{(z_1,z_2,z_3,z_4)^T\in\mathbb{C}^4\colon \quad z_1=-iz_2+(1+i)z_3+z_4\right\}$$

y las ecuaciones paramétricas de W son

$$\left.\begin{array}{rcl} z_1 &=& \mu+i\beta \\ z_2 &=& \lambda+i\mu \\ z_3 &=& i\lambda \\ z_4 &=& \lambda+i\beta \end{array}\right\}, \qquad \lambda,\ \mu,\ \beta\in\mathbb{C}.$$

1. Comprobar si V y W son subespacios de $\mathbb{C}^4$.
2. Comprobar si es cierto que $W\subset V$.
3. Responder a las mismas preguntas, si en las ecuaciones paramétricas de W sólo se admiten λ, μ, β reales.

11. El vector v del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ tiene coordenadas $(1,2)$ respecto de la base $B=\{v_1,v_2\}$. Hallar las coordenadas de v en la base $B'=\{u_1,u_2\}$ en $\mathbb{R}^2$, sabiendo que

$$v_1=3u_1+2u_2; \qquad v_2=4u_1-u_2\,.$$

12. Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados:

i) $f_1\colon M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ dada por $f_1(A)=AB$, donde $B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$.

ii) $f_2\colon M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ dada por $f_2(A)=A+B$, con $B\in M_2(\mathbb{R})$ fija.

iii) $f_3\colon M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ dada por $f_3(A)=AB-BA$, donde $B=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$.

iv) $f_4\colon M_2(\mathbb{C})\to V$ dada por $f_4(A)=A+A^T$, donde $V=\{A\in M_2(\mathbb{C})\colon A=A^T\}$.

v) $f_5\colon M_2(\mathbb{R})\to W$ dada por $f_5(A)=AA^T$, donde $W=\{A\in M_2(\mathbb{R})\colon A=A^T\}$.

vi) $f_6\colon \mathcal{P}_n^{\mathbb{R}}\to\mathcal{P}_n^{\mathbb{R}}$ dada por $f_6(p(x))=p(x+1)$.

vii) $f_7\colon \mathcal{P}_n^{\mathbb{R}}\to\mathcal{P}_n^{\mathbb{R}}$ dada por $f_7(p(x))=p(x)+1$.

viii) $f_8\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por $f_8(v)=\lambda_0 v$ con $\lambda_0\in\mathbb{R}$ fijo.

ix) $f_9\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por $f_9(v)=v_0-v$ con $v_0\in\mathbb{R}^3$ fijo.

x) $f_{10}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por $f_{10}(x_1,x_2,x_3)=(x_1,1,x_3)^T$.

xi) $f_{11}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por $f_{11}(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2-x_2^2,0,0)^T$.

xii) $f_{12}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por $f_{12}(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3,x_1+x_2,x_3)^T$.