ÁLGEBRA I. HOJA 1'5

1. Decidir razonadamente si la composición de funciones es asociativa. Es decir, suponiendo que todas las operaciones estén bien definidas, determinar si $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

2. De los números complejos enunciados a continuación calcular su módulo y su argumento y escribirlos en forma trigonométrica o polar.

$$1+i,\ 1-i, \qquad -1-i, \qquad \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}.$$

3. Demostrar utilizando la forma binómica y la forma polar de los números complejos que:

   a) El producto de un número por su conjugado es un número real.

   b) El cociente de un número por su conjugado es de módulo 1. Observar que la demostración usando la forma polar es mós corta.

   c) Comprobar los resultados anteriores en los cálculos siguientes:

   $$(1+2i)(1-2i), \qquad \frac{3+4i}{3-4i},$$

   d) Utilizar los resultados anteriores para calcular:

   $$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right), \qquad \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

4. Probar la asociatividad de la multiplicación de números complejos usando su expresión en forma polar y comparar la simplicidad del cálculo respecto del que hay que hacer para demostrarla en forma binómica.

5. Calcular en forma polar y en forma binómica los siguientes números complejos:

   $$\sqrt{-4}, \qquad \sqrt{i}, \qquad \sqrt{-i}.$$

   Comprobar que los resultados son los mismos.

6. Calcular en forma binómica y en forma trigonométrica los siguientes números complejos:

   $$\sqrt{1+i}, \qquad \sqrt{-2+2i}.$$

   Comparando las expresiones determinar el valor de $\cos(\pi/8)$ y $\cos(3\pi/8)$.

   Comprobar que $\cos^2(\pi/8)+\cos^2(3\pi/8)=1$. ¿Porqué?

7. Expresar las siguientes raíces en forma binómica utilizando la forma trigonométrica correspondiente y el ejercicio anterior.

   $$\sqrt[4]{-16}, \qquad \sqrt[3]{-8}, \qquad \sqrt[3]{-27i}, \qquad \sqrt[4]{16i}.$$

8. Hallar las raíces cuartas de $-i$ y representarlas gráficamente.

9. Hallar las raíces quintas de la unidad. Señalar cuáles son las raíces que son conjugadas entre sí.

10. Hallar las siguientes raíces:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}}, \qquad \sqrt[6]{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

¿Cómo están relacionadas entre sí?

11. Resolver en el cuerpo de los números complejos las ecuaciones:

$x^6+1=0, \qquad x^6+2x^3+1=0.$

12. Habiendo comprobado que $(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)(x-1)=x^n-1$, demostrar que

a) Las soluciones complejas y las soluciones reales de $x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$ son raíces $(n+1)$-ésimas de la unidad.

b) La ecuación $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ no tiene ninguna solución real.

c) La ecuación $x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$ no tiene ninguna solución real si n es par y tiene exactamente una solución real si n es impar. ¿Cuál es la solución real si n es impar?

d) Las raíces $(n+1)$-ísimas de la unidad que no coinciden con 1, son soluciones de la ecuación $x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$.

13. Resolver en el cuerpo de los números complejos las ecuaciones:

$x^6+x^5-x-1=0, \qquad x^7+x^6-x-1=0.$

14. Demostrar las fórmulas:

(i) $|z+1|^2-|z-1|^2=4\Re z;$ (ii) $|z+1|^2+|z-1|^2=2+2\,|z|^2.$

15. Deducir de la fórmula de De Moivre $(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)^n=\cos(n\alpha)+i\operatorname{sen}(n\alpha)$

a) Las fórmulas del coseno del ángulo triple y del seno del ángulo triple.

b) Las fórmulas análogas para el ángulo quíntuple.

16. La igualdad $e^{i(\alpha+\beta)}=e^{i\alpha}e^{i\beta}$ es más fácil de recordar que las fórmulas para los cosenos y los senos de las sumas y diferencias de ángulos. Derivad dichas fórmulas usando $e^{i(\alpha+\beta)}=e^{i\alpha}e^{i\beta}$. A partir de las identidades para $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$, probar que

$$\cos(w_1t)+\cos(w_2t)=2\cos\left(\frac{w_2+w_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{w_2-w_1}{2}t\right).$$

Supongamos que escuchamos dos tonos puros $\cos(w_1t)$ y $\cos(w_2t)$ de frecuencias $w_2>w_1>0$. Si w_1 y w_2 son suficientemente parecidas, al oír uno u otro tono no percibiremos diferencias. Sin embargo, si escuchamos los dos a la vez, en vez de un sonido continuo se escuchan pulsaciones. Dibujad esquemáticamente las gráficas de $\cos(w_1t)$, $\cos(w_2t)$ y $2\cos(\frac{w_2+w_1}{2}t)\cos(\frac{w_2-w_1}{2}t)$ para explicar dichas pulsaciones.

17. Hallar $\cos(\pi/12)$ calculando la raíz de $e^{i\pi/6}$.

18. Usando como definición

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc,$$

resolver las ecuaciones

(a) $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0;$ **(b)** $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0.$

A los números λ se los denomina autovalores de las matrices correspondientes.

19. Encontrar todos los autovalores de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix};$ **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

20. (Interferencia). Tenemos n antenas alineadas de forma que entre una y la siguiente siempre hay la misma distancia. Cada una de ellas emite una señal a la vez, con la misma amplitud A y frecuencia w. Teniendo en cuenta la separación entre las antenas, la señales llegan a un cierto punto con diferentes fases. De hecho, la radiación conjunta es

$$R = A\cos(wt) + A\cos(wt+\phi) + A\cos(wt+2\phi) + \ldots + A\cos(wt+(n-1)\phi).$$

a) Para calcular R en forma cerrada, vamos a usar el truco de *complexificar*, es decir, escribir $\cos x = \Re(e^{ix})$. En nuestro caso, tenemos que

$$R = A\ \Re(e^{iwt} + e^{iwt+i\phi} + e^{iwt+2i\phi} + \ldots + e^{iwt+(n-1)i\phi}).$$

Usad esta expresión, la fórmula de la suma de una progresión geométrica, y la expresión del coseno en términos de la exponencial, para calcular R.

Solución: $R = A[(\operatorname{sen}(n\phi/2)/\operatorname{sen}(\phi/2)]\cos(wt+(n-1)\phi/2)$.

b) Hallar R si $A = 1$, $n = 20$, y $\phi = 1/20$. Determinlar qué valores de ϕ hacen que $R(t) = 0$ para todo t.

21. (Muelle con rozamiento). La ecuación

$$x''(t) + x'(t) + x(t) = 0 \qquad (*)$$

rige el movimiento de un muelle con cierto rozamiento. Para encontrar una solución oscilatoria, vamos a usar de nuevo el truco de complexificar. Definimos la derivada de una función compleja $f(t)+ig(t)$ como $(f(t)+ig(t))' = f'(t)+ig'(t)$. Así, si encontramos una función compleja $z(t) = f(t) + ig(t)$ que satisfaga

$$z''(t) + z'(t) + z(t) = 0 \qquad (**)$$

tendremos que su parte real $f(t)$ será solución de $(*)$.

a) Considerad soluciones del tipo $z_\lambda(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Estudiad para qué λ se cumple que $z_\lambda(t)$ es solución de $(**)$.

b) Usad las soluciones del apartado anterior para obtener soluciones $x_\lambda(t)$ de $(*)$.

Solución: $x(t) = e^{-t/2}\cos(t\sqrt{3}/2)$. Observación: si escribimos $z(t) = x(t) + iy(t)$, la parte imaginaria $y(t)$ nos proporciona otra solución.