ÁLGEBRA I. HOJA 1

1. Resolver $z^3 = i$ en coordenadas polares y rectangulares. (Recordatorio: las coordenadas rectangulares, o cartesianas, o binómicas, son de la forma $a + ib$; las polares, $re^{i\alpha}$).

   Solución (parcial): $\sqrt{3}/2 + i/2, -\sqrt{3}/2 + i/2, -i$.

2. Resolver $iz + (2 - 10i)z = 3z + 2i$.

   Solución: $-9/41 - i/41$.

3. Resolver $z^2 = -8 - 6i$.

4. Resolver $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$.

   Solución: $2 - i, 1 + 2i$.

5. Resolver el sistema $(i + 1)z + (2 - i)w = -3i, (2i + 1)z + (3 + i)w = 2 + 2i$.

   Solución: $z = -1 + 5i, w = 19/5 - 8i/5$.

6. Escribir $\sum_{n=0}^{99}(i + 1)^n$ en coordenadas rectangulares y polares. Solución: $(1 + 2^{50})i$.

7. Escribir en coordenadas polares $4 + i, -3/2 - i/2, -1 + 2i$.

8. Comprobar que $(1 + i)^{12} = -64$, y $((1 - i)/\sqrt{2})^{-6} = -i$.

9. Resolver las siguientes ecuaciones i) $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$; ii) $z^4 = i$; iii) $z^3 = -8i$.

   Soluciones a iii): $z = 2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$.

10. Recordad que las rotaciones en el espacio tridimensional no conmutan en general. Decidir razonadamente si las rotaciones en el plano conmutan.

11. Usando $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, donde x es un número real, demostrar que $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ y $\operatorname{sen} x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$.

12. Hallar los siguientes números complejos en forma binómica $a + bi$:

$$(1 + 2i)(1 - 2i),\ \frac{1 + 2i}{1 - 2i}, \qquad \left(\frac{1 + 2i}{1 - 2i}\right)^2, \qquad \frac{(1 + 2i)^3}{(2 - i)^3},\ \frac{(1 + 2i)^3}{(2 - 2i)^3}.$$

13. Hallar un número complejo en forma binómica: $a + bi$ tal que $(a + bi)^2 = 1 + i$.

14. Resolver la ecuación $x^4 - 2x^2 + 10 = 0$ en el cuerpo de los números complejos.

15. Resolver la ecuación $z^2 - (1 + i)z + i = 0$ en el cuerpo de los números complejos.

16. Demostrar a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, y b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

17. Demostrar que para todo polinomio $p(z)$ con coeficientes reales, $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$.

18. Demostrar:

    a) $|\overline{z}| = |z|$.

    b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ usando coordenadas rectangulares.

    c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

19. Sea $\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la norma euclídea (la longitud) del vector $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Comprobar que para todo par de vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, la norma del producto vectorial $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|_2$ nos da el área del paralelogramo determinado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.