ALGEBRA I **Examen Final, Convocatoria Ordinaria** CURSO 2015/16

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

INSTRUCCIONES: Entregar UNICAMENTE estas hojas. Cuando se pide en un apartado responder V (verdadero) o F (falso), responder *únicamente* V o F, marcando adecuadamente la opción elegida. IMPORTANTE: Se prohibe el uso de calculadoras, libros, apuntes, teléfonos móviles, y en general, de toda la tecnología moderna (posterior al bolígrafo). IMPORTANTE: En los problemas II, III y IV las respuestas deben justificarse adecuadamente.

INFORMACION: Los puntos asignados a las preguntas V o F son: respuesta correcta, 1 punto, respuesta incorrecta, - 1 punto, en blanco, 0 puntos. Valor mínimo de cualquier problema: 0 puntos.

I) 1) Si la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$ es sobreyectiva, entonces su núcleo tiene dimensión 1. V F $6 = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim \ker T + 5$

2) La aplicación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida mediante $T(z) = Re(z)$ (donde $Re(z)$ denota la parte real de z) es $\mathbb{C}$-lineal. V F $T(iz) \neq i\,T(z)$

3) La aplicación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida mediante $T(z) = Im(z)$ (donde $Im(z)$ denota la parte imaginaria de z) es $\mathbb{R}$-lineal. V F $[T]_{B_c B_c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) La aplicación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida mediante $T(z) = (2+3i)\,\overline{z}$, es $\mathbb{C}$-lineal. V F $T(iz) \neq i\,T(z)$

5) La aplicación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida mediante $T(z) = (2+3i)\,\overline{z}$, es $\mathbb{R}$-lineal. V F

6) Si en una matriz cuadrada reemplazamos la fila j por la fila j menos la fila i, el valor del determinante no cambia. V F

7) Si dos matrices cuadradas tienen la misma traza y el mismo determinante, entonces representan a la misma aplicación lineal, quizá con respecto a bases distintas. V F $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]_{BB} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8) Existe una matriz 3×3 con cuatro autovalores complejos distintos. V F

9) Las funciones $\cos(t), \operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(2t)$ son linealmente independientes. V F Evaluar $a\cos t + b\operatorname{sen} t + c\operatorname{sen} 2t = 0$ en $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$

10) La función $(\cos t)^{10} \in Span_{\mathbb{C}}\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$. V F Expandir $\cos^{10} t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^{10}$

II) a) (5 puntos) Sea $\mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}$ el espacio de todos los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual a 2. Sea $B_c = \{1, x, x^2\}$ la base canónica de dicho espacio, y sean $p_1(x) = (1-x)^2$, $p_2(x) = 2x(1-x)$, $p_3(x) = x^2$. Hallar las coordenadas $[p_i(x)]_{B_c}$ de los polinomios p_1, p_2 y p_3 con respecto a la base canónica.
b) (5 puntos) Probar que el conjunto $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}$.
c) (10 puntos) Sea $D : \mathcal{P}_2^{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}$ la aplicación lineal definida mediante $D(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + 2a_2 x$. Hallar la matriz $A = [D]_{BB}$ que representa a D con respecto a la base B. ¿Cual es la dimensión del núcleo de D?

a) $P_1(x) = 1 - 2x + x^2$, $P_2(x) = 2x - 2x^2$, $P_3(x) = x^2$

luego $[P_1(x)]_{B_c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[P_2(x)]_{B_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $[P_3(x)]_{B_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Como tenemos 3 vectores en un e.v. de dimension 3, basta probar independencia lineal. Esto puede hacerse directamente a partir de la definición: escribimos

$$a\, p_1(x) + b\, p_2(x) + c\, p_3(x) = 0.$$

Evaluando en $x=0$ obtenemos $a=0$; evaluando en $x=1$, $c=0$. Por tanto, $b\, 2x(1-x) = 0$, luego $b=0$.

Tambien puede hacerse usando teoremas: como

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$ las columnas son linealmente independientes.

c) La matriz de la derivada D puede calcularse fácilmente con respecto a la base canónica:

$$[D]_{B_c B_c} = \Big[[D1]_{B_c} \; [Dx]_{B_c} \; [Dx^2]_{B_c} \Big]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $[D]_{B_cB_c}$ tiene 2 columnas linealmente independientes, $\dim(\operatorname{Im} D) = 2$, luego $\dim(\operatorname{Ker} D) = 1$, ya que $\dim P_2^{\mathbb{R}} = 3 = \dim(\operatorname{Im} D) + \dim(\operatorname{Ker} D)$.

Cambio de base:

$$A = [D]_{BB} = [I]_{BB_c}[D]_{B_cB_c}[I]_{B_cB}$$

Hallamos $[I]_{BB_c} = [I]_{B_cB}^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

III) a) (10 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x & +2y & -z & +3w & = 1 \\ 2x & +2y & -z & +2w & = 1 \\ x & & +3z & +3w & = 1 \end{array}\right\},$$

expresar dicho sistema sistema en forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, y calcular sus soluciones o justificar que no las tiene.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \qquad \boxed{z = \frac{1-4w}{3}}$$

$$2y = 1 + z - 4w, \quad 6y = 3 + 1 - 4w - 12w = 4 - 16w$$

$$\boxed{y = \frac{2-8w}{3}}$$

$$3x = 3 - 6y + 3z - 9w = 3 - 4 + 16w + 1 - 4w - 9w = 3w$$

$$\boxed{x = w}$$

b) (10 puntos) Hallar bases para $Ker(A)$ e $Im(A)$, el núcleo y la imagen de A respectivamente.

Base para Ker $A = \{ \overline{X} = (x, y, z, w) : A\overline{X} = \overline{0} \}$.

Resolviendo el sistema anterior con $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ en vez de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, obtenemos

$\boxed{3z = -4w}$, $2y = z - 4w$, $6y = -4w - 12w = -16w$

$\boxed{3y = -8w}$, $3X = -6y + 3z - 9w = 16w - 4w - 9w = 3w$

Ker $A = \{ (3w, -8w, -4w, 3w) : w \in \mathbb{K} \}$.

Base : $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

Base para Im A: Tomamos las columnas de A con pivotes en E_A: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

IV) (20 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, hallar sus autovalores (posiblemente complejos) y autovectores asociados. Encontrar matrices D y P tales que D es diagonal y $A = PDP^{-1}$ (no es necesario hallar P^{-1}).

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = 1 \pm i\sqrt{2}, \quad D = \begin{bmatrix} 1+i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-i\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Autovector asociado a $1+i\sqrt{2}$:

$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{2} & 1 \\ -2 & -i\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} -i\sqrt{2}x + y = 0 \\ y = i\sqrt{2}x \end{array}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Autovector asociado a $1-i\sqrt{2}$

$$\begin{bmatrix} i\sqrt{2} & 1 \\ -2 & i\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = -i\sqrt{2}x, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \end{bmatrix}$$